ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 105, № 2
ноябрь, 1995

Б. Фукcштейнер, В.В. Цегельник

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Исследованы некоторые аналитические свойства автомодельных решений системы N дифференциальных уравнений в частных производных, представляющей собой обобщение уравнения Лиувилля.

1. Исследуем некоторые аналитические свойства решений автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\left(y_0' \cdot y_0^{-1}\right)' &= y_1, \\
\left(y_1' \cdot y_1^{-1}\right)' &= y_2 - 2y_1, \\
\left(y_k' \cdot y_k^{-1}\right)' &= y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}, \qquad k = \overline{2, N-2}, \\
\left(y_{N-1}' \cdot y_{N-1}^{-1}\right)' &= -2y_{N-1} + y_{N-2},
\end{aligned} \tag{1}$$

представляющей собой автомодельную редукцию системы уравнений в частных производных [1,2]

$$\begin{aligned}
\left((w_0)_t' \cdot w_0^{-1}\right)_x' &= w_1, \\
\left((w_1)_t' \cdot w_1^{-1}\right)_x' &= w_2 - 2w_1, \\
\left((w_k)_t' \cdot w_k^{-1}\right)_x' &= w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}, \qquad k = \overline{2, N-2}, \\
\left((w_{N-1})_t' \cdot w_{N-1}^{-1}\right)_x' &= -2w_{N-1} + w_{N-2}
\end{aligned} \tag{2}$$

в случае $w_l(x,t) = \exp(-z)y_l(z),\ \exp z = \tau,\ \tau = xt$, где $y_l' = \frac{dy_l}{dz},\ l = \overline{0, N-1}$.

Система (2) является обобщением уравнения Лиувилля

$$w_{xt} = \exp w \tag{3}$$

при $N - 2$ и $N = 3$. Действительно, в случае $N = 2$ при условии $w_0 = 3w_1$ мы получаем уравнение (3), где $w_1 = \exp w$.В случае $N = 3$, $w_2 = w_1$ второе и третье уравнения системы (2) также представляют собой (с точностью до масштабного преобразования x и t) уравнение (3).

Уравнение (3) возникает во многих разделах математики и физики. В частности, в [3] показано, что ряд нелинейных моделей (теория тяготения с постоянной скалярной величиной, безмассовое скалярное поле Борна–Инфельда, релятивистская струна) описывается одним нелинейным уравнением (3), а в [4,5] установлено, что задача об исследовании топологии стационарных плазменных конфигураций в поперечно-согласованных полях также сводится к отысканию решений уравнения (3). В ряде работ достаточно подробно изучены различные свойства решений уравнения (3). Так, в работе [6] показано, что (3) интегрируется при помощи метода обратной задачи рассеяния. В [7] показано, что сингулярным решениям (3) соответствует некоторая вполне интегрируемая динамическая система, которая описывает нетривиально взаимодействующие релятивистские частицы. Наконец, в работе [8] доказано, что (3) обладает свойством Пенлеве, и исходя из этого получена формула общего решения уравнения (3), которая впервые приведена в [9].

2. Система (1) при $N = 2$, $y_0 = 3y_1$ является системой P-типа, т.к. она сводится к уравнению
$$y_1 y_1'' - y_1'^2 = y_1^3, \tag{4}$$
которое является третьим уравнением Пенлеве [10]
$$yy'' = y'^2 + \exp z(\alpha y^3 + \beta y) + \exp 2z(\gamma y^4 + \delta) \tag{P$_3$}$$
в случае $y = \exp(-z)y_1$, $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$. Из уравнения (4) следует, что
$$\left(y_1' y_1^{-1}\right)^2 = 2y_1 + K, \tag{5}$$
где K – постоянная интегрирования. Уравнение (5) интегрируется в элементарных функциях. В частности, при $K = 0$ оно имеет решение $y_1 = \left(-z/\sqrt{2} + \widetilde{C}\right)^{-2}$, где $\widetilde{C}$ – произвольная постоянная. Следовательно, функции
$$y_0 = 3(-z/\sqrt{2} + \widetilde{C})^{-2}, \qquad y_1 = (-z/\sqrt{2} + \widetilde{C})^{-2} \tag{6}$$
являются решениями системы (1) в случае $N = 2$.

Система (1) при $N = 3$, $y_2 = y_1$ сводится к системе
$$(y_0' \cdot y_0^{-1})' = y_1, \qquad (y_1' \cdot y_1^{-1})' = -y_1, \tag{7}$$
второе уравнение которой есть уравнение (P$_3$) в случае $y = \exp(-z)y_1$, $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = \delta = 0$.

Система (5) имеет первый интеграл
$$y_0' \cdot y_0^{-1} + y_1' \cdot y_1^{-1} = C_1, \tag{8}$$
где C_1 – произвольная постоянная. Из (8) следует, что
$$y_0 = y_1^{-1} \cdot \exp(C_1 z + C_2), \tag{9}$$
где C_2 – произвольная постоянная.

Так как второе уравнение системы (7) является уравнением P-типа, то из (9) следует, что система (7) в целом является системой P-типа.

3. В общем случае при $N > 2$ система (1) имеет первый интеграл

$$(N \ln y_0)' + ((N-1)\ln y_1)' + \dots + (\ln y_{N-1})' = \widetilde{C_1}, \tag{10}$$

где $\widetilde{C_1}$ – произвольная постоянная. Из (10) сразу следует, что

$$\ln(y_0^N \cdot y_1^{N-1} \cdots y_{N-1}) = \widetilde{C_1} z + \widetilde{C_2}$$

или

$$y_0 = (y_0^{N-1} \cdot y_2^{N-2} \cdots y_{N-1})^{-1/N} \cdot \exp\left((\widetilde{C_1} z + \widetilde{C_2})/N\right), \tag{11}$$

где $\widetilde{C_2}$ – постоянная интегрирования.

При $N = 2$ $\quad (y_0 \neq 3y_1)$ система (1) имеет двухпараметрическое семейство полюсных решений

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{6}{(z-z_0)^2} + 3\beta + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (z-z_0)^k, \\ y_1 &= \frac{2}{(z-z_0)^2} + \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z-z_0)^k, \end{aligned} \tag{12}$$

где z_0, β – произвольные постоянные, а параметры α_k, β_k однозначно определяются через параметр β. Следует отметить, что если в (12) $\beta = 0$, то $\alpha_k = \beta_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, и мы получаем однопараметрическое семейство решений вида (6).

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(y_1' \cdot y_1^{-1}\right)' &= y_2 - 2y_1, \\ \left(y_k' \cdot y_k^{-1}\right)' &= y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}, \qquad k = \overline{2, N-2}, \\ \left(y_{N-1}' \cdot y_{N-1}^{-1}\right)' &= -2y_{N-1} + y_{N-2}, \end{aligned} \tag{13}$$

представляющую собой систему (1) без первого уравнения. Используя подход, предложенный в [11], в основе которого лежит применение теста Ковалевской–Пенлеве (см. обзор [12]), покажем, что справедлива

Теорема. *Система* (13) *имеет семейство полюсных решений, зависящих от* N *произвольных постоянных.*

Доказательство. Следуя [13], нетрудно показать, что полюсные решения системы (13) в случае их существования имеют вид

$$y_l = \frac{a_l}{t^2} + \frac{b_l}{t} + \sum_{q=2}^{\infty} \alpha_{q-2}^{(l)} t^{q-2}, \qquad l = \overline{1, N-1}, \qquad t = z - z_0, \tag{14}$$

где z_0 – произвольный параметр.

Подставляя (14) в (13), получим системы линейных уравнений для определения коэффициентов $a_l \neq 0, b_l$ $(l = \overline{1, N-1})$:

$$\begin{gathered}-2a_1 + a_2 = 2,\\ a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} = 2, \qquad k = \overline{2, N-2},\\ -2a_{N-1} + a_{N-2} = 2,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}a_1(b_2 - b_1) + 2b_1(a_2 - a_1 - 2) = 0,\\ a_k(b_{k+1} - 2b_k + b_{k-1}) + 2b_k(a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1} - 2) = 0, \qquad k = \overline{2, N-2},\\ a_{N-1}(b_{N-2} - 2b_{N-1}) + 2b_{N-1}(a_{N-2} - 2a_{N-1} - 2) = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что числа $a_l = -l(N-l)$ $(l = \overline{1, N-1})$ определяют единственное решение системы (15). Система (16) при этом имеет нулевое решение $b_1 = b_2 = \dots = b_{N-1} = 0$.

Для определения коэффициентов $\alpha_{q-2}^{(l)}$, $(q = \overline{2, N}, l = \overline{1, N-1})$ имеем $N-1$ систему линейных однородных уравнений

$$\begin{gathered}(s + 2 - 2N)\alpha_{q-2}^{(1)} + (N-1)\alpha_{q-2}^{(2)} = 0,\\ k(N-k)\alpha_{q-2}^{(k-1)} + [s - 2k(N-k)]\alpha_{q-2}^{(k)} + k(N-k)\alpha_{q-2}^{(k+1)} = 0, \qquad k = \overline{2, N-2},\\ (N-1)\alpha_{q-2}^{(N-2)} + (s + 2 - 2N)\alpha_{q-2}^{(N-1)} = 0, \qquad s = q^2 - q, \qquad q = \overline{2, N}.\end{gathered} \tag{17}$$

Каждая из систем (17) имеет нетривиальное решение, если $\det A = 0$, где A – трехдиагональная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & a_{22} & b_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-2,N-3} & a_{N-2,N-2} & b_{N-2,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

с ненулевыми элементами $a_{ii} = s - 2i(N-i)$, $i = \overline{1, N-1}$; $b_{jj+1} = j(N-j)$, $j = \overline{1, N-2}$; $c_{k+1,k} = (k+1)(N-k-1)$, $k = \overline{1, N-2}$. Покажем, что $\det A = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots(s-\alpha_{N-1})$, $\alpha_m = m(m+1)$, $m = \overline{1, N-1}$. Прибавляя к последней строке матрицы A ее первые $N-2$ строки, получим следующее равенство: $\det A = (s-2)\det A_1$, где A_1 – матрица, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A за исключением элементов последней строки. Каждый элемент последней строки матрицы A_1 равен 1.

Умножим первые $N-3$ строки матрицы A_1 соответственно на числа $N-2$, $N-3$, …, 2; последнюю строку – на число $-2(N-2)$ и сложим с предпоследней строкой. В результате получим следующее равенство: $\det A = (s-2)(s-6)\det A_2$, где A_2 – матрица, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A_1 за исключением элементов предпоследней строки. Элементы предпоследней строки равны соответственно $N-2, N-3, \dots, 2, 1, 0$.

Умножая первые $N-4$ строки матрицы A_2 соответственно на числа $\lambda_1 = \frac{(N-2)(N-3)}{2}$, $\lambda_2 = \frac{(N-3)(N-4)}{2}, \dots, \lambda_{N-4} = 3$ $(\lambda_1 = \lambda_2 + N - 3,\ \lambda_2 = \lambda_3 + N - 4, \dots,$

$\lambda_{N-5} = \lambda_{N-4} + 3$, $\lambda_{N-4} = 3$), предпоследнюю строку – на число $-3(N-3)$ и прибавляя к $N-3$-й строке, получим равенство $\det A = (s-2)(s-6)(s-12)\det A_3$, где A_3 – матрица, элементы которой равны соответствующим элементам матрицы A_2 за исключением элементов третьей снизу строки. Элементы данной строки равны соответственно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-4}, 1, 0, 0$. Кроме того, элементы трех последних строк матрицы A_3 подчинены следующему правилу: $a_{il} = a_{il+1} + b_{i+1l+1}$, $i = N-3, N-2, N-1$; $l = \overline{1, N-1}$. При этом элементы, лежащие выше главной диагонали, равны нулю.

Последовательно преобразуя предложенным выше способом $N-4$ раза матрицу A_3, мы получим равенство $\det A = (s-2)(s-6)\ldots[s-(N-2)(N-1)]\,[s-(N-1)N]\cdot 1$, где

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N-2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & N-3 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \ldots & 3 & 1 & 0 & 0 \\ N-2 & N-3 & N-4 & N-5 & \ldots & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

что и следовало показать.

Каждое уравнение $q^2 - q - m(m+1) = 0$, $m = \overline{1, N-1}$, имеет только один положительный корень $q = m+1$. Таким образом, уравнение $\det A = 0$ имеет точно $N-1$ положительный корень $q_1 = 2$, $q_2 = 3, \ldots, q_{N-1} = N$.

Нетрудно видеть, что $\operatorname{rank} A = N-2$, если $q = 2, 3, \ldots, N$. Это означает, что в каждой строке коэффициентов матрицы

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_0^{(1)} & \alpha_0^{(2)} & \ldots & \alpha_0^{(N-1)} \\ \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \ldots & \alpha_1^{(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-2}^{(1)} & \alpha_{N-2}^{(2)} & \ldots & \alpha_{N-2}^{(N-1)} \end{bmatrix}$$

имеется один произвольный коэффициент. Остальные коэффициенты данной строки однозначно определяются через произвольный коэффициент. Если в разложении (14) $q > N$, то коэффициенты $\alpha_{q-2}^{(1)}, \alpha_{q-2}^{(2)}, \ldots, \alpha_{q-2}^{N-1}$ $(q = N+1, N+2, \ldots)$ однозначно определяются через элементы матрицы B. Таким образом, каждая компонента y_l в разложении (14) зависит (с учетом того, что z_0 – произвольный параметр) от N произвольных постоянных. Теорема доказана.

Отметим следующее: если все элементы матрицы B равны нулю, то $\alpha_{q-2}^{(l)} = 0$ $(l = \overline{1, N-1}$, $q = N+1, N+2, \ldots)$ и мы получаем точное однопараметрическое решение системы (13): $y_l = -\frac{l(N-l)}{(z-z_0)^2}$, $l = \overline{1, N-1}$.

Таким образом, система (1) в случае $N > 2$ имеет точное решение

$$y_0 = \left[(-1)^{N-1}(N-1)!\right]^{-\frac{1}{N}} (z-z_0)^{(N-1)} \exp\left((\widetilde{C}_1 z + \widetilde{C}_2)/N\right), \qquad y_l = -\frac{l(N-l)}{(z-z_0)^2}$$

и решение

$$y_0 = (y_1^{N-1} \cdot y_2^{N-2} \cdots y_{N-1})^{-\frac{1}{N}} \exp\left((\widetilde{C}_1 z + \widetilde{C}_2)/N\right),$$

$$y_l = -\frac{l(N-l)}{(z-z_0)^2} + \sum_{q=2}^{\infty} \alpha_{q-2}^{(l)} (z-z_0)^{q-2}, \qquad l = \overline{1, N-1}, \tag{18}$$

причем в (18) каждый формальный ряд, определяющий компоненту y_l, содержит N произвольных постоянных.

Список литературы

[1] *Fuchssteiner B., Lo Schiavo M.* // Appl. Math. Lett. 1993. V. 6. №1. P. 97.
[2] *Fuchssteiner B., Lo Schiavo M.* // Manuscripta Math. 1993. V. 79. №1. P. 27.
[3] *Барбашов Б.М., Нестеренко В.В., Червяков А.М.* // ТМФ. 1979. Т. 40. №1. С. 15.
[4] *Комаров Н.Н.* // Ядерный синтез. 1963. Т. 3. №3. С. 174.
[5] *Фадеев В.М., Кварцхава И.Ф., Комаров Н.Н.* // Ядерный синтез. 1965. Т. 5. №3. С. 202.
[6] *Андреев В.А.* // ТМФ. 1976. Т. 29. №2. С. 213.
[7] *Погребков А.К.* // ТМФ. 1980. Т. 45. №2. С. 161.
[8] *Tamizhmani K.M., Lakshmanan M.* // J. Math. Phys. 1986. V. 27. №8. P. 2257.
[9] *Liouville J.* // J. Math. Pur. Appl. 1853. V. 18. P. 71.
[10] *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИУ, 1939.
[11] *Веселов А.П., Шабат А.Б.* // Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. №2. С. 1.
[12] *Kruskal M.D., Clarkson P.A.* // Stud. Appl. Math. 1992. V. 86. №2. P. 87.
[13] *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

Fachbereich Mathematik, University of Paderborn,
4790 Paderborn, Germany
Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники

Поступила в редакцию
29.XII.1994 г.

B. Fuchssteiner, V.V. Tsegel'nik

ANALYTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Are investigated some analytic properties of similar solutions of a system of N partial differential equations, wich is generalised Liouville equation.