Maximumpunkte

Von

B. Fuchssteiner und W. Hackenbroch

Auf einem kompakten Hausdorff-Raum X sei $\mathfrak{F}$ eine Familie von oberhalbstetigen reellwertigen Funktionen; für $x \in X$ bezeichne

$$[x] = \{y \in X : f(x) = f(y), \quad \text{jedes} \quad f \in \mathfrak{F}\}$$

die zugehörige Äquivalenzklasse. In [4] wurde die Menge

$$\operatorname{Max} X = \{x \in X : \text{zu jedem Kompaktum } K \subset X \text{ mit } K \not\subset [x]\ \exists f \in \mathfrak{F} \\ \text{mit } f(x) \geqq \max f(K) \text{ und } f(x) > \inf f(K)\}$$

untersucht und gezeigt, daß $\operatorname{Max} X$ ein Rand ist, d.h., daß jedes $f \in \mathfrak{F}$ sein X-Maximum schon an einem Punkt aus $\operatorname{Max} X$ annimmt.

Man sieht leicht (vgl. das Korollar von Satz 2), daß $\operatorname{Max} X$ im Choquet-Rand

$$\operatorname{Ch} X = \{x : \mu \in M_x \Rightarrow \operatorname{Tr} \mu \subset [x]\}$$

enthalten ist; hierbei bezeichnet

$$M_x = M_x(\mathfrak{F}) = \{\mu \in \operatorname{Prob} X : \mu(f) \geqq f(x), \text{ jedes } f \in \mathfrak{F}\}$$

die Gesamtheit der den Punkt $x \in X$ repräsentierenden Radonmaße. $\operatorname{Max} X$ und $\operatorname{Ch} X$ hängen in verschiedener Weise von $\mathfrak{F}$ ab: ist etwa $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}$ der von $\mathfrak{F}$ und den konstanten Funktionen erzeugte konvexe Kegel, so ist offenbar $M_x(\mathfrak{F}) = M_x(\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}})$; $\mathfrak{F}$ und $\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}$ haben also denselben Choquet-Rand, während einfachste Beispiele zeigen, daß $\operatorname{Max}_{\mathfrak{F}} X \subsetneqq \operatorname{Max}_{\tilde{\tilde{\mathfrak{F}}}} X$ sein kann (vgl. [4]).

In dieser Arbeit wird eine konvexe kompakte Teilmenge X eines Hilbertraumes H konstruiert, für die, mit $\mathfrak{F}$ den Restriktionen auf X der stetigen linearen Funktionale, die strenge Inklusion $\operatorname{Max} X \subsetneqq \operatorname{Ch} X$ gilt, so daß die Rand-Eigenschaft von $\operatorname{Max} X$ in diesem Fall eine echte Verschärfung des Krein-Milmanschen Satzes bedeutet. Außerdem werden allgemeine Beziehungen zwischen verschiedenen weiteren Klassen von Maximumpunkten abgeleitet.

1. Maximumpunkte. Wir betrachten neben der schon definierten Menge $\operatorname{Max} X$ noch

$$\operatorname{Max}' X = \{x : \text{zu jedem Kompaktum } K \text{ disjunkt zu } [x]\ \exists f \in \mathfrak{F} \\ \text{mit } f(x) > \max f(K)\},$$

$$\mathrm{Max}'' X = \{x\colon \text{zu jedem Kompaktum } K \text{ disjunkt zu } [x]\ \exists f \in \mathfrak{F} \\ \text{mit } f(x) \geqq \max f(K) \text{ und } f(x) > \inf f(K)\}.$$

Natürlich ist $\mathrm{Max}' X \subset \mathrm{Max}'' X$, und ebenso $\mathrm{Max}' X \subset K$ für jeden abgeschlossenen Rand K, welcher mit jedem $x \in K$ auch $[x]$ enthält. Da andererseits nach [4], Satz 1, $\mathrm{Max}\, X$ ein Rand ist, ergibt sich

Satz 1. *Sei*

$$\tau = \{U \subset X\colon\ U \text{ offen und } [x] \subset U \text{ für jedes } x \in U\}$$

die zu $\mathfrak{F}$ gehörige Vergröberung der Topologie von X. Dann gilt bezüglich der τ-abgeschlossenen Hülle: $\mathrm{Max}' X \subset \overline{\mathrm{Max}\, X}$.

Das folgende Lemma ist bekannt (vgl. [1]) und drückt eine abstrakte Konvexitätseigenschaft der Funktionen aus $\mathfrak{F}$ aus.

Lemma. *Sei $x \in X$ und $\mu \in M_x$; gilt dann $f(x) \geqq \max f(\mathrm{Tr}\,\mu)$ für eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$, so ist $f(y) = f(x)$, jedes $y \in \mathrm{Tr}\,\mu$.*

Beweis. Sonst gäbe es ein $f \in \mathfrak{F}$ und einen nicht-leeren relativ offenen Teil U von $\mathrm{Tr}\,\mu$ mit $\delta \doteqdot \sup f(U) < f(x)$ und $\sup f(\mathrm{Tr}\,\mu) \leqq f(x)$. Dann wird wegen $\mu(U) > 0$

$$\mu(f) = \Big(\int_U + \int_{\complement U}\Big) f\, d\mu \leqq \delta\, \mu(U) + f(x)\, \mu(\complement U) < f(x),$$

im Widerspruch zu $\mu \in M_x$. ▮

Korollar. $\mathrm{Max}\, X \subset \mathrm{Ch}\, X$.

Der folgende Satz gibt eine zur Definition des Choquet-Randes analoge Charakterisierung von $\mathrm{Max}' X$ bei additiv abgeschlossenem $\mathfrak{F}$, die insbesondere zeigt, daß sich dann $\mathrm{Max}' X$ bei Übergang von $\mathfrak{F}$ zu dem von $\mathfrak{F}$ und den Konstanten erzeugten Kegel $\tilde{\mathfrak{F}}$ nicht mehr ändert.

Satz 2. *Sei $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$. Dann ist*

$$\mathrm{Max}' X = \{x\colon \mu \in M_x \Rightarrow [x] \cap \mathrm{Tr}\,\mu \neq \emptyset\}.$$

Beweis. Nach einer Folgerung des Hahn-Banachschen Satzes von H. König ([6] S. 584) gilt für ein Kompaktum $K \neq \emptyset$ und ein $x \in X$

$$f(x) \leqq \max f(K), \text{ jedes } f \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathrm{Prob}\, K \text{ mit } f(x) \leqq \mu(f), \text{ jedes } f \in \mathfrak{F}.$$

Daher ist $x \notin \mathrm{Max}' X \Leftrightarrow \exists$ Kompaktum K mit $[x] \cap K = \emptyset$ und ein $\mu \in M_x$ mit $\mathrm{Tr}\,\mu \subset K \Leftrightarrow \exists \mu \in M_x$ mit $[x] \cap \mathrm{Tr}\,\mu = \emptyset$. ▮

Korollar. *Sei $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Max}\, X \subset \mathrm{Ch}\, X \subset \mathrm{Max}' X = \mathrm{Max}'' X;$$

nach Satz 1 stimmen die abgeschlossenen Hüllen bezüglich der dort definierten Topologie τ aller dieser Mengen überein (und beschreiben also den Silov-Rand von X bezüglich $\mathfrak{F}$), und mit $\mathrm{Max}\, X$ *sind auch* $\mathrm{Ch}\, X$ *und* $\mathrm{Max}' X$ *τ-abgeschlossen.*

Beweis. Nach dem vorigen Korollar ist $\operatorname{Max} X \subset \operatorname{Ch} X$, und nach Satz 2 gilt $\operatorname{Ch} X \subset \operatorname{Max}' X \subset \operatorname{Max}'' X$. Sei nun $x \in \operatorname{Max}'' X$. Auf Grund des obigen Lemmas ist dann für jedes $\mu \in M_x$ notwendig $[x] \cap \operatorname{Tr} \mu \neq \emptyset$, also nach Satz 2 auch $x \in \operatorname{Max}' X$. ▌

Bemerkung. 1. Sind die Klassen $[x]$ für jedes $x \in X$ abgeschlossen (also z.B. $\mathfrak{F}$ Punkte-trennend, oder $\mathfrak{F} \subset C(X)$), so kann man $\operatorname{Ch} X$ auch definieren durch

$$\operatorname{Ch}(X) = \{x \colon \mu \in M_x \Rightarrow \mu([x]) > 0\};$$

denn gilt $\mu([x]) > 0$ für jedes $\mu \in M_x$, so sogar $\mu([x]) = 1$, da andernfalls

$$\lambda = \frac{1}{1 - \mu([x])} (\mu - \mu_x) \quad \text{mit } \mu_x(E) \doteqdot \mu([x] \cap E)$$

ebenfalls zu M_x gehört, aber $\lambda([x]) = 0$ ist.

2. Ist $\mathfrak{K}$ eine beliebige Klasse kompakter Teilmengen von X, welche für $K \in \mathfrak{K}$ auch jedes kompakte $K' \subset K$ enthält, und beschränkt man sich in der Definition von $\operatorname{Max} X$, $\operatorname{Max}' X$, $\operatorname{Max}'' X$ auf Kompakta $K \in \mathfrak{K}$ und betrachtet in der Definition von $\operatorname{Ch} X$ nur Maße $\mu \in M_x$ mit $\operatorname{Tr} \mu \in \mathfrak{K}$, so bleiben offensichtlich alle Inklusionen des letzten Korollars und die Charakterisierung von $\operatorname{Max}' X$ gemäß Satz 2 richtig.

3. Ist insbesondere $\mathfrak{K}$ das System der endlichen Teilmengen und sind die Klassen $[x]$ jeweils abgeschlossen, so zeigen Satz 2 und Bemerkung 1, daß für die hierzu gehörigen Mengen im Falle $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$ sogar $\operatorname{Max} X \subset \operatorname{Ch} X = \operatorname{Max}' X = \operatorname{Max}'' X$ gilt. Das zum System $\mathfrak{K}$ der höchstens 3-punktigen Mengen gehörige $\operatorname{Max} X$ wurde schon von Ky Fan [7] betrachtet (vgl. [4]).

4. Ist $\mathfrak{F} \subset C(X)$, und sind die $\mu \in M_x$ mit endlichem Träger schon schwach-*-dicht in M_x (wie z.B. in der weiter unten betrachteten „geometrischen" Situation), so gilt im Falle $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$ ebenfalls $\operatorname{Ch} X = \operatorname{Max}' X$; denn für $x \in \operatorname{Max}' X$ und $\mu \in M_x$ mit endlichem Träger gilt $\operatorname{Tr} \mu \subset [x]$ nach Bemerkung 1, und andererseits ist die Menge der $\mu \in \operatorname{Prob} X$ mit $\operatorname{Tr} \mu \subset [x]$ schwach-*-abgeschlossen.

In Satz 2 wurde der Zusammenhang zwischen $\operatorname{Ch} X$ und $\operatorname{Max}' X$ mit Hilfe repräsentierender Maße beschrieben. Der folgende, für Funktionenalgebren bekannte Satz gibt umgekehrt eine Charakterisierung des Choquet-Randes durch Maximumseigenschaften (vgl. [3], S. 90f.).

Satz 3. *Sei $\mathfrak{F}$ konvexer Kegel, der die konstanten Funktionen enthält, und $[x]$ abgeschlossen für alle $x \in X$.*
Dann ist bei beliebigen $\alpha < \beta < 1$

$$\operatorname{Ch} X = \{x \colon \textit{zu jedem Kompaktum } K \textit{ disjunkt } [x]\ \exists\, f \in \mathfrak{F} \ \textit{mit } f \leqq 1 \textit{ und } f(x) \geqq \beta > \alpha \geqq \max f(K)\} \doteqdot \operatorname{Max}'_{\alpha,\beta} X.$$

Beweis. Definiert man für jedes $x \in X$ das Funktional $p_x \colon C(X) \to \mathbf{R}$ durch

$$p_x(u) = \sup\{f(x) \colon f \in \mathfrak{F} \text{ mit } f \leqq u\},$$

so gilt offenbar: p_x ist superlinear, und für ein lineares Funktional $\mu \colon C(x) \to \mathbf{R}$ ist

$$\mu \in M_x \Leftrightarrow \mu(u) \geqq p_x(u), \quad \text{jedes} \quad u \in C(X).$$

Sei nun $x \in \operatorname{Ch} X$ und K ein zu $[x]$ disjunktes Kompaktum. Dann gibt es nach Urysohn ein $u \in C(X)$ mit $u \leqq 1$, $u|[x] = 1$ und $u|K \leqq \alpha$, und nach Hahn-Banach hierzu ein $\mu \in M_x$ mit $\mu(u) = p_x(u)$. Wegen $\operatorname{Tr}\mu \subset [x]$ ist $\mu(u) = 1$, und nach Definition von $p_x(u) \exists$ also ein $f \in \mathfrak{F}$ mit $f \leqq u$ und $f(x) \geqq \beta$, d.h. $x \in \operatorname{Max}'_{\alpha,\beta} X$.

Ist umgekehrt $x \in \operatorname{Max}'_{\alpha,\beta} X$ und $\mu \in M_x$, so bleibt $\mu([x]) > 0$ oder also wegen Regularität, mit einer Konstanten > 0, $\mu(U) \geqq$ const. für jede offene Umgebung U von $[x]$ zu zeigen. Nach Voraussetzung $\exists f \in \mathfrak{F}$ mit $f \leqq 1$, $f(x) \geqq \beta > \alpha \geqq \max f(\complement U)$.

Daher ist

$$\beta \leqq f(x) \leqq \mu(f) \leqq \alpha\,\mu(\complement U) + \mu(U) = \alpha + (1-\alpha)\,\mu(U),$$

$$\Rightarrow \mu(U) \geqq \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}. \quad \blacksquare$$

Bemerkung. Definiert man zu einer Familie A von stetigen, reell- oder komplexwertigen Funktionen die Menge

$$P_A X = \{x\colon \text{zu jedem Kompaktum } K \text{ disjunkt } [x]\ \exists f \in A \text{ mit } \|f\| = f(x) > \max|f(K)|\}$$

der (schwachen) „peak points“, so hat man, mit $\operatorname{Re} A = \{\operatorname{Re} f\colon f \in A\}$, die folgenden trivialen Inklusionen:

$$P_A X \subset P_{\operatorname{Re} A} X \subset \operatorname{Max}_{\operatorname{Re} A} X.$$

Ist A eine Sup-Norm-Algebra, so gilt nach Bishop (vgl. [3], S. 97) auch $\operatorname{Ch}_A X \subset P_A X$, und somit insgesamt nach dem Korollar von Satz 2

$$P_A X = P_{\operatorname{Re} A} X = \operatorname{Max}_{\operatorname{Re} A} X = \operatorname{Ch}_{\operatorname{Re} A} X = \operatorname{Ch}_A X.$$

Daß $\operatorname{Ch}_{\operatorname{Re} A} X \subsetneqq \operatorname{Max}'_{\operatorname{Re} A} X$ sein kann, zeigt das folgende Beispiel, das wir Herrn G. Lumer verdanken[1]):

Sei $X \subset \mathbf{C}$ ein „Swiss cheese“, also kompakt, mit $\operatorname{int} X = \emptyset$ und $C(X) \supsetneqq R(X) \doteq A$, der Abschließung in $C(X)$ der Algebra aller rationalen Funktionen mit Polen höchstens außerhalb von X. Nach Bishops peak point-Kriterium für rationale Approximation ([3], S. 172) ist dann $X \setminus \operatorname{Ch}_A X \neq \emptyset$ (nämlich von positivem 2-dimensionalem Lebesguemaß). Andererseits ist $\operatorname{Max}'_{\operatorname{Re} A} X = X$: Seien $x \in X$ und $K \subset X$ kompakt mit $d \doteq \operatorname{dist}(x, K) > 0$ beliebig. Wegen $\operatorname{int} X = \emptyset$ gibt es dann $y \in \complement X$ mit $|x-y| \leqq$ $\leqq d/3$, so daß $f\colon f(z) = \dfrac{x-y}{|x-y|}\,\dfrac{1}{z-y}$ zu A gehört. Offensichtlich gilt

$$f(x) = |f(x)| \geqq 3/d \quad \text{und} \quad \max \operatorname{Re} f(K) \leqq \max|f(K)| \leqq 3/2d.$$

2. Die geometrische Situation. In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, daß X konvexer kompakter Teil eines lokalkonvexen Hausdorff-Raumes E ist und $\mathfrak{F} = (E' + \mathbf{R})|X$ die Gesamtheit aller stetigen affinen Funktionen auf X bezeichnet, die sich zu stetigen affinen Funktionen auf ganz E fortsetzen lassen.

---

1) $\operatorname{Ch}_A(X) \subsetneqq \operatorname{Max}'_{\operatorname{Re} A}(X) = X$ gilt ebenfalls für die von R. McKissick konstruierte nicht-triviale normale Algebra (Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 391—395 (1963)).

Satz 4. *Es gilt (mit beliebigen $\alpha < \beta < 1$)*

$$\operatorname{Max} X \subset \operatorname{Ch} X = \operatorname{ex} X = \operatorname{Max}'_{\alpha,\beta} X = \operatorname{Max}' X = \operatorname{Max}'' X.$$

Beweis. Bekanntlich ist $\operatorname{Ch} X = \operatorname{ex} X = \{x\colon X \backslash \{x\} \text{ konvex}\}$. Nach dem Bisherigen bleibt nur noch für ein $x \in \operatorname{Max}' X$ die Konvexität von $X \backslash \{x\}$ nachzuweisen, und diese ergibt sich unmittelbar aus Satz 2. ▮

Im folgenden Beispiel wird eine konvexe kompakte Menge X (mit abgeschlossener Extremalpunktmenge $\operatorname{ex} X$) konstruiert, für welche $\operatorname{Max} X \subsetneqq X$ ist.

Beispiel. Sei H ein Hilbertraum, darin $x_1, x_2, \ldots$ eine Orthogonalfolge mit

$$\|x_n\| = 1/n .$$

Mit Hilfe der Funktion

$$f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N} \quad \text{mit} \quad f(n) = n - [\sqrt{n-1}]^2$$

(mit $[0] = 0$, $[r] = \max\{n \in \mathbf{N}\colon n \leqq r\}$ für $r \geqq 1$; insbesondere ist also $f(n) < n$ für $n > 1$) definieren wir induktiv

$$y_1 = x_1; \ldots; y_n = \frac{1}{1 - 1/n}\left(x_1 - \frac{1}{n}\,(y_{f(n)} + x_n)\right); \qquad n = 2, 3, \ldots .$$

Dann gilt zunächst offensichtlich

i) $y_n \in \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$ für jedes n; insbesondere ist $\tilde{X} \doteq \{y_1, y_2, \ldots\}$ linear unabhängig.

ii) $y_n \to y_1 = x_1$; insbesondere ist $\tilde{X}$ kompakt.

iii) $X \doteq \overline{\operatorname{co}}\, \tilde{X} = \left\{\sum_1^\infty \lambda_i y_i\colon \lambda_i \geqq 0, \sum_1^\infty \lambda_i = 1\right\}$ (also ebenfalls kompakt).

Behauptung. $\operatorname{ex} X = \tilde{X}$.

Beweis. Trivialer Weise gilt $\operatorname{ex} X \subset \tilde{X}$. Wäre ein $y_N \in \tilde{X}$ nicht Extremalpunkt, so gäbe es eine Darstellung $y_N = \sum_1^\infty \lambda_m y_m$ mit, wegen i), unendlich vielen Koeffizienten $\lambda_m \neq 0$. Insbesondere kann dann ein Index $N_0 > N$ und > 3 gefunden werden mit $\lambda_{N_0} \geqq \lambda_m$ für alle $m \geqq N_0$. Wir führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Es ist für $m \geqq N_0$

$$\langle x_{N_0}, y_m\rangle = \frac{-1}{m-1}\,(\langle x_{N_0}, y_{f(m)}\rangle + \langle x_{N_0}, x_m\rangle) =$$

$$= \frac{-1}{m-1}\left(\langle x_{N_0}, y_{f(m)}\rangle + \frac{1}{N_0^2}\,\delta_{N_0,m}\right) =$$

$$= \frac{-1}{m-1}\left(\frac{1}{N_0^2}\,\delta_{N_0,m} - \frac{1}{f(m)-1}\left(\frac{1}{N_0^2}\delta_{N_0,f(m)} + \langle x_{N_0}, y_{f^2(m)}\rangle\right)\right) = \cdots =$$

$$(*) \qquad = \begin{cases} \dfrac{1}{N_0^2} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1}{1 - f^k(m)}, & \text{falls } f^n(m) \doteq f \circ f^{n-1}(m) = N_0, \\ 0, & \text{falls für kein } n \in \mathbf{N} \;\; f^n(m) = N_0 . \end{cases}$$

Nun ist für $m > 1$

$$m = f^0(m) > f(m) > f^2(m) > \cdots > f^i(m) = f^{i+1}(m) = \cdots = 1,$$

also im Falle $f^n(m) = N_0$

$$(**) \qquad \begin{cases} \prod_{k=0}^{n} (f^k(m) - 1) = (m-1)(f(m)-1)\cdots(f^{n-1}(m)-1)(N_0 - 1) > \\ \qquad > (f^{n-1}(m) - 1)^n (N_0 - 1). \end{cases}$$

Für $l \doteq f^{n-1}(m)$ und $p = [\sqrt{l-1}]$ wird dann $N_0 = f(l) = l - p^2$ und $p^2 + 1 \leqq \leqq l < (p+1)^2 + 1$, also

$$l < (\sqrt{l - N_0} + 1)^2 + 1, \quad \Rightarrow l > \frac{N_0^2 + 4}{4}.$$

Damit wird aus (**) die Abschätzung

$$(***) \qquad \prod_{k=0}^{n} (f^k(m) - 1) > \left(\frac{N_0^2}{4}\right)^n (N_0 - 1) > (N_0 - 1)\, 2^n.$$

Nunmehr ergibt sich

$$0 = \left\langle x_{N_0}, y_N - \sum_1^\infty \lambda_m y_m \right\rangle = -\lambda_{N_0} \langle x_{N_0}, y_{N_0}\rangle - \sum_{N_0+1}^\infty \lambda_m \langle x_{N_0}, y_m\rangle =$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{\lambda_{N_0}}{(N_0 - 1) N_0^2} - \sum_{N_0+1}^\infty \lambda_m \langle x_{N_0}, y_m\rangle,$$

also

$$0 \geqq \frac{\lambda_{N_0}}{(N_0 - 1) N_0^2} - \sum_{N_0+1}^\infty \lambda_m |\langle x_{N_0}, y_m\rangle| \geqq$$
$$\geqq \frac{\lambda_{N_0}}{(N_0 - 1) N_0^2} - \lambda_{N_0} \sum_{N_0+1}^\infty |\langle x_{N_0}, y_m\rangle| >$$
$$\overset{(***)}{>} \frac{\lambda_{N_0}}{(N_0 - 1) N_0^2} - \lambda_{N_0} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{N_0^2 (N_0 - 1)} \frac{1}{2^n} = 0. \quad \blacksquare$$

Behauptung. $x_1 \notin \operatorname{Max} X$.

Beweis. Sonst ergäbe die Definition von $\operatorname{Max} X$ (mit $K = \tilde{X}$) ein $h \in \mathfrak{F}$ mit $h(x_1) \geqq \max h(\tilde{X})$ und $h(x_1) > h(y_{m_0})$ für ein $m_0 \in \mathbf{N}$. Dann ist also

$$U = \{z \in H : h(x_1) > h(z)\}$$

eine offene Umgebung von y_{m_0}, die wegen $x_n \to 0$ insbesondere alle Elemente der Form $y_{m_0} + x_m$ für $m \geqq$ einem hinreichend großen N enthielte. Offenbar gibt es $m \geqq N$ mit $f(m) = m_0$, und für solche m ergibt sich folgender Widerspruch:

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{m}\right) y_m + \frac{1}{m} (y_{f(m)} + x_m), \Rightarrow$$
$$h(x_1) = \left(1 - \frac{1}{m}\right) h(y_m) + \frac{1}{m} h(y_{m_0} + x_m) < h(x_1). \quad \blacksquare$$

Bemerkung. Ist X ein Simplex mit abgeschlossener Extremalpunktmenge $\operatorname{ex} X$, und nimmt man als Funktionenfamilie $\mathfrak{F}$ alle stetigen affinen Funktionen auf X (also die auf X gleichmäßige Abschließung von $(E' + \mathbf{R}) \mid X$), so bleibt natürlich $\operatorname{Ch} X = \operatorname{ex} X = \operatorname{Max}' X$.

Behauptung. Dann gilt auch $\operatorname{Max} X = \operatorname{ex} X$.

Beweis. Nach einer bekannten Charakterisierung von Bauer-Simplexen ([2]) ist dann $\mathfrak{F}$ ein Vektorverband. Sei $x \in \operatorname{ex} X$ und K ein Kompaktum mit $x \notin K$. Wegen $x \in \operatorname{Max}' X$ gibt es ein $f \in \mathfrak{F}$ mit $f(x) > \max f(K)$, wobei nach eventueller Addition einer Konstanten noch $f \geqq 0$ angenommen werden kann; $g = \inf_{\mathfrak{F}} (f, f(x))$ erfüllt dann $g(x) = f(x)$ wegen $x \in \operatorname{ex} X$ und somit $\|g\| = g(x) > \max f(K)$. Also ist $x \in P_{\mathfrak{F}} X \subset \operatorname{Max} X$. ∎

Literaturverzeichnis

[1] H. Bauer, Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte. Arch. Math. **11**, 200—205 (1960).
[2] H. Bauer, Kennzeichnung kompakter Simplexe mit abgeschlossener Extremalpunktmenge. Arch. Math. **14**, 415—421 (1963).
[3] A. Browder, Introduction to function algebras. New York 1969.
[4] B. Fuchssteiner, Bemerkungen zu den Minimumsätzen von H. Bauer. Arch. Math. **22**, 287—290 (1971).
[5] B. Fuchssteiner, Extremalpunkte und Hüllenbildungen. Arch. Math. **22**, 523—527 (1971).
[6] H. König, On certain applications of the Hahn-Banach and minimax theorems. Arch. Math. **21**, 583—591 (1970).
[7] Ky Fan, On the Krein Milman theorem. In: Proc. Symposia Pure Math. Vol. VII, 211—219, Providence 1963.

Eingegangen am 15. 11. 1971

Anschrift der Autoren:

B. Fuchssteiner
Mathematisches Institut der TH
D-61 Darmstadt
Hochschulstr.

W. Hackenbroch
Mathematisches Institut der Universität
D-66 Saarbrücken