Bemerkungen zu den Minimumsätzen von H. Bauer

Von

B. Fuchssteiner

Ist Ψ eine Menge unterhalb stetiger Funktionen auf einem kompakten Raum X mit Werten in $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, so machen die Minimumsätze von H. Bauer Aussagen über Mengen $L \subset X$, so daß die $f \in \Psi$ auf L ihr Minimum in X annehmen. Eine solche Menge ist zum Beispiel der Choquet-Rand von X bezüglich Ψ.

In der vorliegenden Arbeit wird ein einfacher, allgemeiner Satz angegeben, der die verschiedenen Minimumsätze als Spezialfälle enthält.

1. Ein allgemeiner Satz. Im folgenden sei X ein kompakter Raum und Ψ eine Menge unterhalb stetiger Funktionen auf X mit dem Wertebereich $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$. K sei eine beliebige nicht-leere, kompakte Teilmenge von X. Für $f \in \Psi$ bezeichnen wirmit $f[K]$:

(1) $$f[K] := \{x \in K \mid f(x) = \inf_{y \in K} f(y)\}.$$

Da unterhalb stetige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Minimum annehmen, gilt $f[K] \neq \emptyset$, außerdem ist $f[K]$ kompakt und $f[K] \subset K$. Sei $\Phi \subset \Psi$ und ϱ eine Wohlordnung von Φ und $f_0 \in \Phi$ das minimale Element bezüglich ϱ, d.h. $(f_0, f) \in \varrho$ $\forall f \in \Phi$.

Wir definieren induktiv:

$$K_{f_0} = f_0[K],$$
$$K_f = f\left[\bigcap_{\substack{(\tilde{f}, f) \in \varrho \\ f \neq \tilde{f}}} K_{\tilde{f}}\right] \quad \forall f \in \Phi \setminus \{f_0\}.$$

Aus der Kompaktheit von K folgt, daß die K_f nichtleere kompakte Mengen sind. Weiter setzen wir:

$$K_\varrho = \bigcap_{f \in \Phi} K_f$$

K ist wieder nichtleer und kompakt. Außerdem gilt für alle $f \in \Phi$

(2) $$f(x) = f(y) \quad \forall x, y \in K_\varrho.$$

Durch vollständige Induktion sieht man leicht, daß für $x \in K_\varrho$ und $x \in \tilde{K} \subset K$, K kompakt, gilt, daß $x \in \tilde{K}_\varrho$. Es sei nun $\mathscr{W}$ die Menge aller Wohlordnungen von Ψ. Wir setzen:

$$B(K) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\varrho \in \mathscr{W}} K_\varrho.$$

Satz 1. *Jedes $f \in \Psi$ nimmt auf $B(X)$ sein Minimum in X an.*

Beweis. Wir fixieren ein beliebiges $f \in \Psi$. Es gibt dann eine Wohlordnung ϱ von Ψ, so daß f minimales Element von ϱ ist. Also $X_\varrho \subset f[X]$. Mit (1) ergibt sich $f(x) \leqq f(y)$ $\forall x \in X_\varrho$, $y \in X$. Aus $\emptyset \neq X_\varrho \subset B(X)$ folgt dann die Behauptung. ▮

Es gilt folgende Charakterisierung von $B(x)$.

Satz 2. *$x \in X$ ist genau dann Element von $B(x)$, wenn für jede kompakte Menge K mit $x \in K \subset X$ entweder ein $f \in \Psi$ und ein $y \in K$ existieren mit*

$$f(x) = \inf\{f(z) \mid z \in K\} < f(y), \quad \textit{oder} \quad \varphi(x) = \varphi(y)\ \forall y \in K,\ \varphi \in \Psi.$$

Beweis. Aus der Konstruktion von $B(K)$ sieht man, daß für $x \in B(X)$ und $x \in K \subset X$ (K kompakt) folgt $x \in B(K)$. Damit folgt unmittelbar die Notwendigkeit der obigen Bedingungen. Wir nehmen nun an, für ein festes $x \in X$ sei die obige Bedingung erfüllt, und wir betrachten die Menge $\mathscr{F}$ bestehend aus allen Paaren (Φ, ϱ), so daß $\Phi \subset \Psi$ und ϱ Wohlordnung von Φ ist mit $x \in X_\varrho$. $\mathscr{F}$ wird mit folgender Ordnungselation ausgestattet:

$$(\Phi, \varrho) \prec (\Phi', \varrho') \Leftrightarrow \Phi \subset \Phi' \text{ und } \varrho' \text{ Fortsetzung von } \varrho \text{ ist.}$$

Diese Ordnung ist induktiv. Sei (Φ, ϱ) ein maximales Element in $\mathscr{F}$. Es sind nun alle $f \in \Phi$ konstant auf der kompakten Menge X_ϱ. Für $\Psi \backslash \Phi \neq \emptyset$, gäbe es auf Grund der Annahme ein $g \in \Psi \backslash \Phi$ mit $g(x) = \inf\limits_{y \in X_\varrho} g(y)$, dann wäre aber

$$(\Phi \cup \{g\}, \varrho \cup \{(f, g) \mid f \in \Phi\}) \gneqq (\Phi, \varrho).$$

Dies widerspricht der Maximalität von (Φ, ϱ). Also ist $\Psi = \Phi$. Damit ist alles bewiesen. ▮

Bemerkung. Ist X eine konvexe kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes E und ist Ψ die Menge der stetigen reellen linearen Funktionale in E, so folgt aus Satz 2, daß $B(X)$ eine Untermenge der Extrempunkte von X ist. Mit dem Satz von Hahn-Banach folgt aus Satz 1 dann unmittelbar der Satz von Krein-Milman.

Man kann nun die diversen Minimumsätze [1], [2], [3], [6] mit Satz 1 oder auch mit Satz 2 beweisen. Wir wollen dies an zwei Beispielen zeigen.

2. Ein Minimumsatz von H. Bauer. X und Ψ seien wie eingangs definiert. $\mathscr{M}$ sei die Menge aller Radonschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf X. Jedem Punkt $x \in X$ wird die Menge $\mathscr{M}_x$ zugeordnet.

$$\mathscr{M}_x = \{\mu \in \mathscr{M} \mid \int_X f\, d\mu \leqq f(x)\ \forall f \in \Psi\}.$$

Der Choquet-Rand $\mathrm{Ch}(X)$ von X bezüglich der Funktionen Ψ ist die Menge aller Punkte $x \in X$, so daß alle $\mu \in \mathscr{M}_x$ von $\{y \in X \mid f(x) = f(y)\ \forall f \in \Psi\}$ getragen werden.

Lemma 1. $\mathrm{Ch}(X) \supset B(X)$.

Beweis. Sei ϱ eine Wohlordnung von Ψ, $x \in X_\varrho$ ein festes Element und $K \subset X \backslash X_\varrho$ eine kompakte Menge. Wir betrachten das Minimum φ bezüglich ϱ von folgender

Menge $\Phi = \{f \in \Psi \mid X_f \not\supset K_f\}$. Φ ist nicht leer. Es gilt dann: $\inf_{y \in K} \varphi(y) - \varphi(x) = \alpha > 0$. Mithin folgt für alle $\mu \in \mathscr{M}_x$

$$\alpha \mu(K) = \int_K \alpha \, d\mu \leqq \int_K (\varphi - \varphi(x)) \, d\mu \leqq 0 .$$

Also gilt für alle $\mu \in \mathscr{M}_x$ und alle kompakten $K \subset X \backslash X_\varrho$ $\mu(K) = 0$; d.h. μ wird von $X_\varrho \subset \{y \in X \mid f(x) = f(y) \; \forall f \in \Psi\}$ getragen. Mithin $x \in \mathrm{Ch}(X)$. ▮

Aus Satz 1 folgt sofort:

Satz (BAUER). *Jedes $f \in \Psi$ nimmt sein Minimum auf X auf dem Choquet-Rand von X an.*

Im allgemeinen gilt jedoch nicht $B(X) = \mathrm{Ch}(X)$. Dafür ein einfaches Beispiel.

Beispiel. Sei $X = \{a, b, c\}$ ausgestattet mit der diskreten Topologie, und sei $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, wobei $\varphi_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 4)\}$ und $\varphi_2 = \{(a, 4), (b, 2), (c, 1)\}$. Dann ist $B(X) = \{a, c\} \subset \mathrm{Ch}(X)$. Wir wollen feststellen, ob $b \in \mathrm{Ch}(X)$. δ_a, δ_b, δ_c seien die Punktmaße auf X. Jedes $\mu \in \mathscr{M}$ hat die Form $\mu = \alpha\delta_a + \beta\delta_b + \gamma\delta_c$ mit $\alpha, \beta, \gamma \geqq 0$ und $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Wenn $\mu \in \mathscr{M}_b$, so folgt: $\alpha + 2\beta + 4\gamma \leqq 2$, $4\alpha + 2\beta + \gamma \leqq 2$. Mithin $\beta = 1$, also $\mathscr{M}_b = \{\delta_b\}$ und $b \in \mathrm{Ch}(X)$.

Von W. HACKENBROCH wurden mir die folgenden Sätze mitgeteilt.

Satz (HACKENBROCH). *Wenn Ψ punktetrennend ist und $\{f + g \mid f, g \in \Psi\} \subset \Psi$, dann gilt: $B(X) \subset \mathrm{Ch}(X) \subset \overline{B(X)}$.*

Beweis. Lemma 1 liefert die erste Inklusion. Mit den Voraussetzungen ist $\overline{\mathrm{Ch}(X)}$ bekanntlich der Silov-Rand von X bezüglich Ψ [4]. Nach Satz 1 ist aber $\overline{B(X)}$ ein abgeschlossener Rand, mithin haben wir: $\overline{B(X)} \supset \mathrm{Ch}(X)$. ▮

Korollar. *Wenn $\Psi \subset C(X)$ und $\{f + g \mid f, g \in \Psi\} \subset \Psi$, dann gilt für $\mathrm{Cl}_\Psi(B(X))$, die abgeschlossene Hülle von $B(X)$ in der Ψ-schwachen Topologie, daß $\mathrm{Cl}_\Psi(B(X)) \supset \mathrm{Ch}(X)$.*

Beweis. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\pi = \{(x, y) \mid f(x) = f(y) \; \forall f \in \Psi\}$ und die natürliche Abbildung $\nu: X \to X/\pi$. X/π ist kompakt unter der Quotiententopologie und $\Psi \subset C(X/\pi)$. Für die abgeschlossene Hülle $\mathrm{Cl}_\Psi(B(X/\pi))$ von $B(X/\pi)$ in der Ψ-schwachen Topologie, die gröber als die Quotiententopologie in X/π ist, gilt nach dem angeführten Satz $\mathrm{Cl}_\Psi(B(X/\pi)) \supset \mathrm{Ch}(X/\pi)$. Man sieht aber sofort, daß $\nu^{-1}(\mathrm{Cl}_\Psi(B(X/\pi)) = \mathrm{Cl}_\Psi(B(X))$, und eine einfache Anwendung des Hahn-Banach Satzes ergibt $\nu^{-1} \mathrm{Ch}(X/\pi) = \mathrm{Ch}(X)$. Daraus folgt dann $\mathrm{Cl}_\Psi(B(X)) \supset \mathrm{Ch}(X)$. ▮

3. Satz von KY FAN. Eine Spezialisierung der Minimumsätze von BAUER ist der Satz von KY FAN. Wir wollen ihn als Beispiel für die Anwendbarkeit von Satz 2 benutzen. Sei X, Ψ wie eingangs definiert. Von Ψ wird noch vorausgesetzt, daß Ψ die Punkte in X trennt. Man sagt, $x \in X$ liegt zwischen z und y ($x \in [z, y]$), wenn: $[(f(x) \leqq f(z) \wedge f(x) \leqq f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) = f(z)] \; \forall f \in \Psi$.

KY FAN nennt einen Punkt Extrempunkt von X ($x \in E(X)$), wenn für alle $z, y \in X$ mit $x \in [z, y]$ folgt: $x = y = z$.

Lemma 2. $B(X) \subset E(X)$.

Beweis. Sei $x \in B(X)$ und $y, z \in X$ mit $x \in [y, z]$. Wir betrachten $K = \{x, y, z\}$. Aus $x \in [y, z]$ folgt, daß es kein $f \in \Psi$ geben kann, welches auf x ein echtes Minimum in K annimmt. Mit Satz 2 folgt dann, daß alle $f \in \Psi$ konstant auf K sind. Da Ψ die Punkte von X trennt, erhält man: $x = y = z$. ∎

Auch hier gilt im allgemeinen nicht, daß $B(X) = E(X)$. (Beispiel in Abschnitt 2.)

Daraus folgt sofort mit Satz 1:

Satz (KY FAN). *Jedes $f \in \Psi$ nimmt in $E(X)$ sein Minimum auf X an.*

Herrn Dr. W. HACKENBROCH und Herrn Prof. Dr. H. KÖNIG von der Universität Saarbrücken möchte ich für ihre Hinweise und Anregungen herzlich danken.

Literaturverzeichnis

[1] H. BAUER, Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte. Arch. Math. **9**, 389—393 (1958).
[2] H. BAUER, Minimalstellen von Funktionen und Extremalpunkte II. Arch. Math. **11**, 200 bis 205 (1960).
[3] H. BAUER, Supermartingale und Choquet-Rand. Arch. Math. **12**, 210—223 (1961).
[4] H. BAUER, Silovscher Rand und Dirichletsches Problem. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **11**, 89—136 (1961).
[5] W. HACKENBROCH (private Mitteilung).
[6] KY FAN, On the Krein Milman Theorem. Proc. Symposia pure Math. **7**, 211—219 (1963).

Eingegangen am 21. 1. 1970 *)

Anschrift des Autors:
Benno Fuchssteiner
Mathematisches Institut
Technische Hochschule Darmstadt

*) Eine Neufassung ging am 4. 1. 1971 ein.