Math. Ann. 186, 149—154 (1970)

Verallgemeinerte Konvexitätsbegriffe und der Satz von Krein-Milman

Benno Fuchssteiner

Herrn Professor Dr. C. Schmieden zum 65. Geburtstag gewidmet

Für lokalkonvexe topologische Vektorräume ist der Begriff der konvexen Menge ein nützliches Hilfsmittel. Viele wichtige Sätze der Funktionalanalysis haben einen geometrischen Inhalt, der sehr eng mit diesem Begriff zusammenhängt. Man denke z. B. an das Theorem von Hahn-Banach, den Hahn-Banachschen Trennungssatz oder den Satz von Krein-Milman.

Die meisten dieser Sätze sind jedoch nicht zu verallgemeinern für den Fall lokalbeschränkter Vektorräume [1–3].

Ziel dieser Arbeit ist es, den Konvexitätsbegriff so zu erweitern, daß man „*konvexe Mengen*" in beliebigen Hausdorffschen Räumen definieren kann. Dieser Begriff umfaßt dann insbesondere die p-Konvexität bei lokalbeschränkten Räumen. Man kann außerdem eine Verallgemeinerung des Satzes von Krein-Milman damit beweisen.

§ 1. Ψ-Konvexität

Es sei T eine Menge und B sei eine beliebige Untermenge von T. Mit $\Pi(B)$ bezeichnen wir die Menge aller endlichen Untermengen von B, und $P(B)$ sei wie üblich die Potenzmenge von B, also die Menge aller Untermengen von B.

Wir gehen aus von einer Mengenfunktion $\Psi^*: \Pi(T) \to P(T)$, die $\Pi(T)$ in $P(T)$ abbildet, und die für alle $\delta, \gamma \in \Pi(T)$ folgende Eigenschaften besitzen soll:

(I) $\Psi^*(\delta) \supset \delta$.

(II) $\delta \in \Pi(\Psi^*(\gamma)) \Rightarrow \Psi^*(\delta) \subset \Psi^*(\gamma)$.

Aus (I) und (II) folgt unmittelbar:

$$\Psi^*(\gamma) = \bigcup_{\delta \in \Pi(\gamma)} \Psi^*(\delta) \;\; \forall \gamma \in \Pi(T). \tag{1}$$

Diese Gleichung erlaubt uns die Funktion Ψ^* auf einfache Weise zu einer Funktion $\Psi: P(T) \to P(T)$ fortzusetzen.

Definition 1. $\Psi: \Psi(B) = \bigcup_{\gamma \in \Pi(B)} \Psi^*(\gamma) \; \forall B \in P(T)$.

Aus Gl. (1) folgt dann:

$$\Psi(\gamma) = \Psi^*(\gamma) \; \forall \gamma \in \Pi(T).$$

Funktionen Ψ, die gemäß Definition 1 Fortsetzungen sind von Funktionen Ψ^* mit den Eigenschaften (I) und (II), nennen wir „*Konvexe*". Die intuitive

Bedeutung wird aus folgendem Beispiel klar. Ist T ein Vektorraum, und bezeichnen wir die konvexe Hülle von $A \subset T$ mit $\Psi_1(A)$, so ist die dadurch bestimmte Abbildung $\Psi_1 : P(T) \to P(T)$ eine Konvexe.

Es sollen nun einige grundlegende Beziehungen für Ψ abgeleitet werden. Es gilt für beliebige $A, B \in P(T)$:

$$\Psi(A) \supset A, \tag{2}$$

$$A \subset B \Rightarrow \Psi(A) \subset \Psi(B), \tag{3}$$

$$\Psi(B) = \bigcup_{\delta \in \Pi(\Psi(B))} \Psi(\delta), \tag{4}$$

$$\Psi(\Psi(A)) = \Psi(A), \tag{5}$$

$$A \subset \Psi(B) \Leftrightarrow \Psi(A) \subset \Psi(B) \tag{6}$$

$$\Psi(\Psi(A) \cap \Psi(B)) = \Psi(A) \cap \Psi(B), \tag{7}$$

$$\Psi(B) = \bigcup_{D \subset \Psi(B)} \Psi(D). \tag{8}$$

Beziehung (2) und (3) folgt aus Definition 1 und (I).

Beweis von (4). Es sei $\gamma \in \Pi(\Psi(B))$. Aus Definition 1 folgt dann die Existenz einer endlichen Familie $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ mit $\gamma_i \in \Pi(B)$, $(i = 1, \ldots, n)$, und $\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Psi^*(\gamma_i)$. Aus (I) und (II) folgt dann $\gamma \in \Psi^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i\right)$. Mit $\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i \in \Pi(B)$, gibt es also für jedes $\gamma \in \Pi(\Psi(B))$ ein $\alpha \in \Pi(B)$ mit $\gamma \subset \Psi^*(\alpha)$. Also: $\bigcup_{\delta \in \Pi(\Psi(B))} \Psi^*(\delta) = \bigcup_{\delta \in \Pi(B)} \Psi^*(\delta) = \Psi(B)$. ┘

Gl. (5) folgt nun unmittelbar aus (4) und Definition 1. Relation (6) folgt aus (2), (3) und (5).

Beweis von (7). Gl. (4) liefert:

$$\Psi(\Psi(A) \cap \Psi(B)) \subset \Psi(A) \cap \Psi(B),$$

und aus (2) folgt:

$$\Psi(\Psi(A) \cap \Psi(B)) \supset \Psi(A) \cap \Psi(B). \quad ┘$$

Beweis von (8). Es gilt:

$$\bigcup_{D \subset \Psi(B)} \Psi(D) \supset \bigcup_{\delta \in \Pi(B)} \Psi^*(\delta) = \Psi(B).$$

Mit (6) folgt:

$$\Psi(D) \subset \Psi(B) \ \forall D \subset \Psi(B),$$

mithin also:

$$\Psi(B) \supset \bigcup_{D \subset \Psi(B)} \Psi(D) \supset \Psi(B). \quad ┘$$

Die Gln. (2) bis (8) sind einsichtig, wenn man für Ψ das oben angegebene Beispiel Ψ_1 vor Augen hat.

Lemma 1. *Ist $\mathscr{A}$ eine bezüglich $\subset$ linear geordnete Teilmenge von $P(T)$, dann gilt:*

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} \Psi(A) = \Psi\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\right).$$

Beweis. Da $\mathscr{A}$ bezüglich $\subset$ linear geordnet ist, existiert für jedes $\gamma\in\Pi\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\right)$ ein $A^*\in\mathscr{A}$ mit $A^*\supset\gamma$. Mithin $\Psi\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\right)\subset\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\Psi(A)$. Aus Gl. (6) folgt dann das Lemma. $\dashv$

Wir wollen noch in Analogie zum üblichen Konvexitätsbegriff gewisse Punkte von Mengen Extrempunkte nennen. Üblicherweise ist ein Punkt a, der Element einer Untermenge A eines Vektorraumes ist, Extrempunkt von A, wenn er nicht in der konvexen Hülle einer endlichen, a nicht enthaltenden, Teilmenge von A liegt. Wir definieren deshalb:

Definition 2. Sei $B\subset T$ beliebig, und $b\in B$. b heißt *Extrempunkt* von B, wenn für alle $\gamma\in\Pi(B)$ gilt: $b\in\Psi(\gamma)\Rightarrow b\in\gamma$.

$E_\Psi(B)$ bezeichne die Extrempunkte von B bezüglich der Konvexen Ψ. Aus Definition 2 folgt unmittelbar:

Lemma 2. $E_\Psi(B)\supset E_\Psi(\Psi(B))$.

Ist T ein Vektorraum und $\Psi_1(B)$ die konvexe Hülle von B, so gilt nach obiger Definition: $E_{\Psi_1}(B)=E_{\Psi_1}(\Psi(B))$. Dies ist im allgemeinen Fall jedoch unrichtig.

Im folgenden nennen wir Mengen B, für die $B=\Psi(B)$ gültig ist, *Ψ-konvexe Mengen*, und $\Psi(A)$ bezeichnen wir als Ψ-Hülle von A.

§ 2. „Konvexe" in Hausdorffschen Räumen

Es sei nun die Menge T immer ein zusammenhängender Hausdorffscher Raum. Mit $\mathscr{U}(A)$ bezeichnen wir die Menge aller offenen Mengen, die A enthalten. Natürlich muß die Abbildung Ψ einige einfache topologische Eigenschaften besitzen, wenn man Verallgemeinerungen von funktionalanalytischen Sätzen bezüglich dieses Konvexitätsbegriffes untersuchen will. Wir definieren deshalb:

Definition 3. Ψ ist eine *topologische Konvexe* im Hausdorffschen Raum T, wenn für alle $B\subset T$ gilt:

i) $\Psi(\overline{\Psi(B)})=\overline{\Psi(B)}$; d. h. der Abschluß Ψ-konvexer Mengen ist wieder Ψ-konvex,

ii) B ist offen $\Rightarrow\Psi(B)$ ist offen,

iii) $\bigcap_{U\in\mathscr{U}(B)}\overline{\Psi(U)}\subset\overline{\Psi(B)}$.

Definition 4. Ψ ist eine *reguläre Konvexe* in T, wenn:
i) $a \in \overline{\Psi(\{b\})}$ und $b \in \overline{\Psi(\{a\})} \Rightarrow a = b\ \forall a, b \in T$,
ii) für alle offenen und Ψ-konvexen A gilt:

$$\Psi(\gamma) \cap (\bar{A} \backslash A) \subset \Psi(\gamma \cap (\bar{A} \backslash A))\ \forall \gamma \in \Pi(\bar{A}).$$

Alle diese Eigenschaften treffen für die Konvexe Ψ_1 in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen zu. In Definition 4 i ist jedoch im Unterschied zu diesem Beispiel nicht gefordert, daß jede einelementige Menge Ψ-konvex ist. Dies ist bei dem Begriff der p-Konvexität auch nicht der Fall. Wir nennen den Hausdorffschen Raum T Ψ-konvex im Punkte $a \in T$, wenn es zu a eine Ψ-konvexe Umgebungsbasis gibt. Ist T in allen Punkten Ψ-konvex, so sprechen wir von einem Ψ-konvexen Raum.

§ 3. Trennungssätze

Es soll nun ein Analogon zum Hahn-Banachschen Trennungssatz angegeben werden.

Satz 1. *Es sei Ψ eine reguläre topologische Konvexe. Dann gibt es zu jeder kompakten Menge A und abgeschlossenen Ψ-konvexen Menge B, mit $A \cap B = \emptyset$, eine offene Ψ-konvexe Menge $\beta \supset B$ mit $\beta \cap A = \emptyset$.*

Beweis. Da B Ψ-konvex und abgeschlossen ist, gilt nach Definition 3: $\bigcap_{U \in \mathscr{U}(B)} \overline{\Psi(U)} = \bar{B} = B$. Die Mengen $T \backslash \overline{\Psi(U)}$ sind offen, und außerdem ist $A \subset T \backslash B = \bigcup_{U \in \mathscr{U}(B)} (T \backslash \overline{\Psi(U)})$. Dies ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge A, also gibt es darunter eine endliche Überdeckung:

$$T \backslash \overline{\Psi(U_i)}; \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad U_i \in \mathscr{U}(B).$$

Mithin: $\bigcap_{i=1}^{n} \Psi(U_i) \cap A = \emptyset$. $\bigcap_{i=1}^{n} \Psi(U_i)$ ist jedoch offen und nach Gl. (7) Ψ-konvex, außerdem ist B darin enthalten. $\lrcorner$

Aus Satz 1 folgt für reguläre topologische Konvexe sofort als Spezialisierung folgender Satz:

Satz 1*. *Es sei $\alpha \subset T$ abgeschlossen und Ψ-konvex, und A sei eine Menge mit $A \backslash \alpha \neq \emptyset$, dann existiert eine offene Ψ-konvexe Menge $\beta \subset T$ mit $\beta \supset \alpha$ und $A \backslash \beta \neq \emptyset$.*

Beweis. Wir nehmen einen Punkt $x \in A \backslash \alpha$, dann gibt es nach Satz 1 eine offene, Ψ-konvexe Menge β mit $x \notin \beta$ und $\beta \supset \alpha$. $\lrcorner$

Lediglich der Vollständigkeit halber soll noch ein weiterer Satz angegeben werden, der den Anschluß an den üblichen Beweis des Krein-Milman-Theorems herstellt. Wir nennen eine Konvexe Ψ *trennend*, wenn für alle Ψ-konvexen Mengen $A, B \subset T$ mit $A \cap B = \emptyset$ und für alle Punkte $a \in T$ entweder $\Psi(\{a\} \cup A) \cap B = \emptyset$ oder $\Psi(\{a\} \cup B) \cap A = \emptyset$ gilt. t ist eine *Hyperebene*, wenn in T zwei Ψ-konvexe Mengen B und B^* mit $B \cup B^* = T$, $B \cap B^* = \emptyset$ und $t = \bar{B} \cap \overline{B^*}$ existieren.

Satz 2. *Ist Ψ eine reguläre, trennende, topologische Konvexe in T, und sind $A, B \subset T$ abgeschlossene Ψ-konvexe Mengen mit $A \cap B = \emptyset$, wobei A kompakt ist, so existiert eine Hyperebene t mit $\Psi(t \cup A) \cap B = \emptyset$.*

Beweis. Nach Satz 1 existiert eine offene Ψ-konvexe Menge $\beta \supset B$ mit $\beta \cap A = \emptyset$. Wir betrachten alle Paare Ψ-konvexer Mengen (α, δ) mit $\alpha \supset A$, $\delta \supset \beta$ und $\alpha \cap \delta = \emptyset$. In der Menge dieser Paare führen wir folgende Halbordnung ein: $(\alpha_1, \delta_1) \leqq (\alpha_2, \delta_2) \Leftrightarrow (\alpha_1 \subset \alpha_2) \wedge (\delta_1 \subset \delta_2)$. Es treffen dann die Voraussetzungen für das Lemma von Zorn zu. Es sei (α^*, δ^*) ein maximales Element. Gäbe es nun ein $x \notin \alpha^* \cup \delta^*$, dann könnte man, da Ψ trennend ist, eine der beiden Mengen α^* oder δ^* vergrößern, was der Maximalität widersprechen würde. Also ist $\alpha^* \cup \delta^* = T$. Da $\delta^* \supset \beta \supset B$, und da β offen, B hingegen abgeschlossen ist, gilt $\overline{\alpha^*} \cap B = \emptyset$. Es ist also $\overline{\alpha^*} \cap \overline{\delta^*}$ eine Hyperebene mit den geforderten Eigenschaften. ⌟

§ 4. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Krein und Milman

Es sei im folgenden Ψ immer eine reguläre topologische Konvexe. A sei eine beliebige Untermenge von T. Wir nennen nun eine Menge $\sigma \subset A$ Stützmenge von A, wenn für alle $\gamma \in \Pi(A)$ gilt: $\Psi(\gamma) \cap \sigma \subset \Psi(\gamma \cap \sigma)$. Extrempunkte sind demnach Stützmengen.

Lemma 3. *Sei A eine kompakte Menge und B eine kompakte Ψ-konvexe Menge mit $T \supset A \supset B$ und $A \backslash B \neq \emptyset$. Dann gibt es eine abgeschlossene Stützmenge σ von A mit $\sigma \cap B = \emptyset$.*

Beweis. Nach Satz 1* existiert eine offene Ψ-konvexe Menge β mit $\beta \supset B$ und $A \backslash \beta \neq \emptyset$. Sei Q die Menge aller dieser β. Q ist halbgeordnet bezüglich $\subset$. Sei G nun eine maximale Kette in Q, dann ist $\beta^* = \bigcup_{\beta \in G} \beta$ offen, außerdem ist β^* nach Lemma 1 Ψ-konvex. Da die $\beta \in G$ linear geordnet sind, sind auch die kompakten, nichtleeren Mengen $A \backslash \beta \, (\beta \in G)$ linear geordnet. Deshalb ist $\bigcap_{\beta \in G} (A \backslash \beta) = A \backslash \beta^* \neq \emptyset$ eine kompakte, nichtleere Menge. β^* ist also aus Q und damit maximales Element. Wäre nun $A \cap \overline{\beta^*}$ echte Untermenge von A, dann gäbe es nach Satz 1* im Widerspruch zur Maximalität von β^* eine offene, Ψ-konvexe Menge $\beta_1 \supset \overline{\beta^*}$ mit $A \backslash \beta_1 \neq \emptyset$. Also: $A \subset \overline{\beta^*}$. Damit gilt für alle $\gamma \in \Pi(A)$, daß $\Psi(\gamma) \cap (A \backslash \beta^*) \subset \Psi(\gamma \cap (A \backslash \beta^*))$. Also ist $A \backslash \beta^*$ abgeschlossene Stützmenge. ⌟

Aus Lemma 3 folgt sofort:

Lemma 4. *Jede kompakte Menge $A \subset T$, die aus mehr als einem Element besteht, besitzt eine abgeschlossene Stützmenge, die echte Untermenge von A ist.*

Beweis. Aus Definition 4i folgt die Existenz zweier Punkte $a, b \in A$ mit $a \notin \overline{\Psi(\{b\})}$. Nach Lemma 3 gibt es eine Stützmenge σ von A mit $\sigma \cap \overline{\Psi(\{b\})} = \emptyset$. ⌟

Wir sind nun in der Lage, folgende Verallgemeinerung des Satzes von Krein und Milman zu beweisen.

Satz 3. *Es sei Ψ eine reguläre, topologische Konvexe in T. Dann gilt für jede kompakte Ψ-konvexe Menge $A \subset T$: $A = \overline{\Psi(E_\Psi(A))}$.*

Beweis. Wir nehmen an $A \neq \overline{\Psi(E_\Psi(A))}$. Sei Q die Menge aller nichtleeren, abgeschlossenen Stützmengen von A, die mit $\overline{\Psi(E_\Psi(A))}$ leeren Durchschnitt haben. Nach Lemma 3 ist Q nicht leer. Sei G eine maximale Kette bezüglich $\subset$ in Q. Wir betrachten $\varkappa = \bigcap_{X \in G} X$. Da die $X \neq \emptyset$ kompakte Mengen sind, folgt $\varkappa \neq \emptyset$. Weiterhin ist $\varkappa \cap \overline{\Psi(E_\Psi(A))} = \emptyset$. Für alle $\gamma \in \Pi(A)$ gilt dann:

$$\Psi(\gamma) \cap X \cap X^* \subset \Psi(\gamma \cap X) \cap X^* \subset \Psi(\gamma \cap X \cap X^*) \;\; \forall\, X, X^* \in G\,.$$

Also: $\Psi(\gamma) \cap \varkappa \subset \Psi(\gamma \cap \varkappa)$. Damit ist gezeigt, daß $\varkappa \in Q$, mithin also minimales Element in Q ist. Wenn nun $\varkappa$ aus mehr als einem Element besteht, dann gibt es nach Lemma 4 eine abgeschlossene, nichtleere Stützmenge δ von $\varkappa$ mit $\varkappa \backslash \delta \neq \emptyset$. Es gilt dann für alle $\gamma \in \Pi(A)$: $\Psi(\gamma \cap \varkappa) \cap \delta \subset \Psi(\gamma \cap \varkappa \cap \delta)$. Also im Widerspruch zur Minimalität von $\varkappa$:

$$\Psi(\gamma) \cap \delta \subset \Psi(\gamma \cap \delta) \;\; \forall \gamma \in \Pi(A)\,.$$

Mithin besteht $\varkappa$ nur aus einem Element a, für welches dann gilt: $a \in \Psi(\gamma) \Rightarrow a \in \gamma \;\; \forall \gamma \in \Pi(A)$. Also ist a Extrempunkt von A. Dies ist ein Widerspruch zu $\varkappa \cap \overline{\Psi(E_\Psi(A))} = \emptyset$. $\lrcorner$

Literatur

1. Köthe, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
2. Landsberg, M.: Lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind. Math. Z. **65**, 104—112 (1956).
3. Rolewicz, S.: On a certain class of linear metric spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Cl II **5**, 471—473 (1957).
4. Valentine, F. A.: Convex sets. New York, Toronto, London: Mc Graw-Hill 1964.

Priv.-Doz. Dr. Benno Fuchssteiner
Mathematisches Institut
der Technischen Hochschule
D-6100 Darmstadt, Hochschulstraße 1

(Eingegangen am 7. Juli 1969)