Jahrbuch Überblicke Mathematik 1984, 273–275

Marginalien

Jahrbuch
Überblicke
Mathematik
1984

Leserbrief

B. Fuchssteiner/J. Horváth: Die Bedeutung der Schnitteigenschaften beim Hahn-Banachschen Satz Jahrbuch Überblicke **12** *(1979)*

Sehr geehrte Herausgeber,

Herr Robert Burckel (Kansas State University, Manhattan, Kansas) hat uns auf einen Fehler im Beweis von Lemma 1 auf Seite 115 der oben genannten Arbeit aufmerksam gemacht. Sein Kollege, Herr Sadahiro Saeki, hat uns einen neuen Beweis übermittelt, den wir mit seiner liebenswürdigen Erlaubnis hier veröffentlichen.

Es wird ein nichtleerer, kompakter Raum K und ein linearer Teilraum $X \neq \{0\}$ des Vektorraums $C(K)$ aller stetigen reellen Funktionen auf K betrachtet. Es wird weiter angenommen, daß K für X minimal ist, d.h. daß K die kleinste abgeschlossene Teilmenge von K ist, auf welcher jede Funktion $x \in X$ ihr Betragsmaximum annimmt. Dann lautet das betreffende Lemma:

Lemma 1: *Sei K minimal für X. Es seien f und g beschränkte reelle Funktionen auf K, wobei f unterhalbstetig und g oberhalbstetig ist. Gilt*

$$\sup_{k\in K} |x(k) - f(k)| \geqslant \sup_{k\in K} |x(k) - g(k)| \tag{8}$$

für alle $x \in X$, so folgt $f \leqslant g$.

Beweis: Falls K aus einem einzigen Punkt besteht, ist die Aussage trivial und man hat sogar $f = g$. Nehmen wir also an, daß K mehr als einen Punkt besitzt. Wir beweisen zuerst folgende Behauptung:

(8.1) Es sei S eine nichtleere, offene Teilmenge von K, $S \neq K$. Dann existiert eine Funktion $z \in X$, für welche

$$\sup_{k\in S} z(k) = \|z\| > \max\{\max_{k\in K\setminus S} |z(k)|, \max_{k\in K}(-z(k))\}$$

gilt (dabei ist $\|z\| = \max_{k\in K} |z(k)|$).

Aus der Minimalität von K folgt die Existenz einer Funktion $x \in X$ so, daß

(8.2) $$\sup_{k \in S} x(k) = \| x \| = 1 > \max_{k \in K \setminus S} | x(k) | = 1 - \epsilon$$

mit $0 < \epsilon \leqslant 1$ gilt. Die Menge $P := \{ k \in K ; x(k) > 1 - \epsilon \}$ ist nichtleer, offen und in S enthalten. Wieder aus der Minimalität von K folgert man, daß eine Funktion $y \in X$ existiert mit der Eigenschaft

(8.3) $$\sup_{k \in P} y(k) = \| y \| = 1 > \max_{k \in K \setminus P} | y(k) | = 1 - \eta,$$

wobei $0 < \eta \leqslant 1$ ist. Mit $a := 2/\eta > 0$ erhält man

(8.4) $$a\eta + \epsilon > 2.$$

Wegen (8.3) gibt es einen Punkt $p \in P \subset S$ mit $y(p) = 1$ und demzufolge

(8.5) $$x(p) + ay(p) > 1 - \epsilon + a.$$

Für $k \in P$ gilt wegen der Definition von P

$$x(k) + ay(k) > 1 - \epsilon - a,$$

da man ja überall $y(k) \geqslant -1$ hat. Für $k \in K \setminus P$ folgt aus (8.3) und (8.4):

$$x(k) + ay(k) \geqslant -1 - a(1 - \eta) > 1 - a - \epsilon,$$

wobei man diesmal benutzt, daß überall $x(k) \geqslant -1$ ist. Man hat also

(8.6) $$-x(k) - ay(k) < -1 + a + \epsilon \leqq 1 + a - \epsilon \quad \text{für } k \in K.$$

Endlich gilt nach (8.2) die Abschätzung

(8.7) $$| x(k) + ay(k) | \leqq 1 - \epsilon + a \quad \text{für } k \in K \setminus S.$$

Aus (8.5), (8.6) und (8.7) folgt, daß die Funktion $z := x + ay \in X$ die Bedingungen von (8.1) erfüllt.

Nehmen wir nun an, daß es einen Punkt $t \in K$ gibt mit $g(t) < f(t)$. Da g oberhalbstetig und f unterhalbstetig ist, gibt es eine offene Umgebung S von t, so daß

$$g(k) < g(t) + \delta \text{ und } f(t) - \delta < f(k)$$

mit $\delta = \frac{1}{3}(f(t) - g(t))$ für alle $k \in S$ gilt. Man hat dann

(8.8) $$g(k) + \delta < g(t) + 2\delta = f(t) - \delta < f(k) \quad \text{für } k \in S.$$

Da K aus mehr als einem Punkt besteht, dürfen wir annehmen, daß $S \neq K$ ist. Es sei z die Funktion, deren Existenz in (8.1) behauptet wurde. Da die Beziehungen

$$\max_{k\in K} (-z(k)) < \max_{k\in K} z(k)$$

und
$$\max_{k\in K\setminus S} z(k) < \max_{k\in K} z(k)$$

gelten und f beschränkt ist, kann man $\theta > 0$ so klein wählen, daß mit $\|f\| := \sup_{k\in K} |f(k)|$

$$\max_{k\in K} (-z(k)) + \theta \|f\| < \max_{k\in K} z(k) - \theta \|f\|$$

und
$$\sup_{k\in K} (z(k) - \theta f(k)) = \sup_{k\in S} (z(k) - \theta f(k))$$

gilt. Es folgt

$$\sup_{k\in K} | z(k) - \theta f(k) | = \sup_{k\in K} (z(k) - \theta f(k)) = \sup_{k\in S} (z(k) - \theta f(k))$$

$$\leqslant \sup_{k\in S} (z(k) - \theta(g(k) + \delta)) \leqslant \sup_{k\in K} | z(k) - \theta g(k) | - \theta\delta.$$

Wir erhalten also

$$\sup_{k\in K} \left| \frac{1}{\theta} z(k) - f(k) \right| < \sup_{k\in K} \left| \frac{1}{\theta} z(k) - g(k) \right|$$

mit $\frac{1}{\theta} z \in X$, im Widerspruch zur Voraussetzung (8).

Benno Fuchssteiner
Fachbereich Mathematik
Gesamthochschule Paderborn
D-4790 Paderborn

Johann Horváth
Dept. of Mathematics
University of Maryland
College Park, MD 20742
USA