Math. Z. 142, 185–190 (1975)

Maße auf σ-kompakten Räumen

Benno Fuchssteiner

1. Einleitung und Hauptsatz

Es sei im folgenden X ein σ-kompakter topologischer Raum und $\mathscr{F}$ ein konvexer Kegel oberhalb-stetiger und nach oben beschränkter $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$-wertiger Funktionen auf X, wobei $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ mit der üblichen Intervalltopologie ausgestattet ist. Ferner setzen wir voraus, daß $\mathscr{F}$ die konstanten Funktionen enthält. Eine lineare (positiv-homogen und additiv) Abbildung $\mu\colon \mathscr{F}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ nennen wir *normiert*, wenn außerdem

$$\mu(f)\leqq \sup_{x\in X} f(x) \qquad \text{für alle } f\in\mathscr{F}.$$

Die Menge der positiven Borelmaße auf X mit Gesamtmasse 1 nennen wir $\mathrm{Prob}(X)$, alle diese Maße sind innerhalb regulär, da X abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen ist. Ein Maß $\nu\in\mathrm{Prob}(X)$ heißt *Darstellungsmaß* von μ, wenn

$$\int_X f\,d\nu\geqq\mu(f) \qquad \forall f\in\mathscr{F}. \tag{1}$$

Natürlich tritt an dieser Stelle für f Gleichheit auf, wenn auch $(-f)\in\mathscr{F}$. Es erhebt sich die Frage: Für welche μ gibt es solche Darstellungsmaße?

Bezüglich dieser Frage existiert eine Vielzahl von Ergebnissen. So hat bei kompaktem Raum X grundsätzlich jedes normierte lineare Funktional ein solches Darstellungsmaß. Dies ist eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach und des Rieszschen Darstellungssatzes (vgl. [10, S. 584] oder auch [4, S. 6]). Ist X lokalkompakt und $\mathscr{F}$ die direkte Summe $\mathbb{R}\oplus C_K(X)$ (Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger), so bedingt der Rieszsche Darstellungssatz die Existenz von Darstellungsmaßen ([2] oder [12]). Ein weiteres Ergebnis zu diesem Problem trägt der Satz von Choquet bei. Wir werden dies im dritten Absatz genauer ausführen. Wenn $\mathscr{F}=CB(X)$ (stetige beschränkte Funktionen auf X), so hat Glicksberg [8] gezeigt, daß bei vollständig regulärem X jedes normierte lineare Funktional genau dann ein darstellendes Maß hat, wenn X pseudokompakt ist. Dies liegt daran, daß (s. [9]) bei pseudokompaktem X für alle (punktweise) fallenden Folgen (f_n) in $CB(X)$ gilt:

$$\sup_{x\in X}\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\geqq\inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in X} f_n(x), \tag{*}$$

daß also bei pseudokompakten X der Satz von Dini gültig ist. Mit dem von Goldstine [9] oder auch Glicksberg [8] bewiesenen Satz, daß jedes normierte lineare Funktional μ auf $CB(X)$, für welches bei fallenden Folgen (f_n) mit Grenzwert in

$CB(X)$

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(f_n) \leqq \mu\big(\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n\big) \tag{$**$}$$

gilt, durch ein Maß dargestellt werden kann, folgt dann aus ($*$) das oben zitierte Ergebnis. Da ($*$) wichtig scheint, sagen wir zukünftig, daß der Kegel $\mathscr{F}$ die *Dini-Eigenschaft* hat, wenn für alle fallenden Folgen (f_n) in $\mathscr{F}$ die Ungleichung ($*$) erfüllt ist. Wir werden folgendes Ergebnis beweisen:

Satz 1. *Genau dann besitzt jedes normierte lineare Funktional auf $\mathscr{F}$ ein Darstellungsmaß, wenn $\mathscr{F}$ die Dini-Eigenschaft hat.*

Bemerkung 1. Wir hätten auch voraussetzen können, daß $\mathscr{F}$ max-stabil ist (d.h. daß die Bildung punktweiser Maxima von endlichen Mengen nicht aus $\mathscr{F}$ herausführt). Denn wenn $\tilde{\mathscr{F}}$ der von $\mathscr{F}$ erzeugte max-stabile Kegel ist, so gibt es nach Hahn-Banach zu jedem normierten linearen Funktional μ auf $\mathscr{F}$ ein normiertes lineares $\tilde{\mu}$ auf $\tilde{\mathscr{F}}$ mit $\mu(f) \leqq \tilde{\mu}(f)\ \forall f \in \mathscr{F}$. Jedes Darstellungsmaß von $\tilde{\mu}$ ist also auch Darstellungsmaß von μ. Umgekehrt impliziert die Dini-Eigenschaft von $\mathscr{F}$ natürlich die von $\tilde{\mathscr{F}}$.

Für max-stabile Kegel läßt sich die Dini-Eigenschaft natürlich formulieren: Jede punktweise gegen 0 konvergierende fallende Folge konvergiert gleichmäßig gegen Null.

Bemerkung 2. Damit ist auch gezeigt, daß für jedes ordnungserhaltende lineare Funktional μ ein reguläres Borelmaß existiert, welches μ im Sinne von (1) darstellt. Denn für $\mu \neq 0$ ist $\dfrac{1}{\mu(1)}\mu$ normiert (1 Einsfunktion).

Bemerkung 3. Der an state-space-Einbettungen gewöhnte Leser wird versuchen, den angegebenen Satz aus dem Ergebnis von Goldstine und Glichsberg zu beweisen, indem er etwa X kanonisch in die quasikompakte Menge aller normierten linearen Funktionale abbildet und dort nachsieht, ob sich die Dini-Eigenschaft von $\mathscr{F}$ auf $CB(\tilde{X})$ überträgt ($\tilde{X}$ ist kanonisches Bild von X). Leider ist dies im allgemeinen nicht der Fall, nicht einmal wenn $\mathscr{F}$ abgeschlossener linearer Teilraum von $CB(X)$ ist. Der in den zitierten Arbeiten angegebene Beweis läßt sich auf den von uns betrachteten Fall nicht übertragen, da die Konstruktion des Daniell-Integrals nicht zur Verfügung steht.

Problem. Im Falle, daß $\mathscr{F}$ *nicht* die Dini-Eigenschaft hat, ist noch die Charakterisierung derjenigen normierten linearen Funktionale offen, die trotzdem Darstellungsmaße besitzen. Nach Meinung des Autors wird im Falle $\mathscr{F} \neq CB(X)$ die Bedingung ($**$) nicht ausreichen.

2. Hilfsmittel und Beweis des Hauptsatzes

Wir statten $WF(\mathscr{F})$, die Menge der normierten linearen Funktionale auf $\mathscr{F}$ mit der gröbsten Topologie aus, so daß alle $f \in \mathscr{F}$ oberhalb-stetig auf $WF(\mathscr{F})$ sind. $WF(\mathscr{F})$ ist dann quasikompakt, da jeder Ultrafilter konvergiert. Mit $\rho\colon X \to WF(\mathscr{F})$ bezeichnen wir die natürliche Abbildung $x \to [f \to f(x)]$. Für Teilmengen $K \subset WF(\mathscr{F})$ ist $m_K\colon \mathscr{F} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ das sublineare Funktional $f \to \sup_{y\in K} y(f)$.

Ein Element $y \in WF(\mathscr{F})$ heißt Extrempunkt, wenn für $y_1, y_2 \in WF(\mathscr{F})$, $0<\lambda<1$ aus $y \leqq \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$ (punktweise auf $\mathscr{F}$) folgt, daß $y = y_1 = y_2$.

Lemma 1. *Sei y normiertes lineares Funktional, welches nicht in der quasikompakten Teilmenge $K \subset WF(\mathscr{F})$ liegt. Gilt $y \leqq m_K$, so ist y kein Extrempunkt.*

Beweis. Wir nehmen an: y sei Extrempunkt $\leqq m_K$. Mit dem Zornschen Lemma finden wir eine minimale quasikompakte Menge $\tilde{K} \subset K$ mit $y \leqq m_{\tilde{K}}$. Für beliebiges $f \in \mathscr{F}$, $\varepsilon > 0$ und $S_1 = \{z \in \tilde{K} | z(f) \geqq y(f) - \varepsilon\}$, $S_2 = \{z \in \tilde{K} | z(f) \leqq y(f) - \varepsilon\}$ gilt $y \leqq \max(m_{S_1}, m_{S_2})$. Nach H. Königs Maximumsatz [4, S. 10] gibt es $0 \leqq \lambda \leqq 1$ und y_1, $y_2 \in WF(\mathscr{F})$ mit $y_1 \leqq m_{S_1}$, $y_2 \leqq m_{S_2}$ und $y \leqq \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$. Da y Extrempunkt sein soll, folgt aus Definition von S_2, daß $\lambda = 1$. Da $\tilde{K}$ minimal, gilt also $S_1 = \tilde{K}$, mithin $z(f) \geqq y(f)\, \forall z \in \tilde{K}$, $\forall f \in \mathscr{F}$. Damit erhalten wir bei beliebigem $z_0 \in \tilde{K}$ mit $y \leqq z_0 = \frac{1}{2} z_0 + \frac{1}{2} z_0$ einen Widerspruch zur Annahme, denn $y \notin K$. □

Das folgende Kriterium ist im Falle kompakter Mengen von W. Hackenbroch [6, S. 417] angegeben worden. Der Beweis ist auf unseren Fall nicht übertragbar. Die etwas verschärfte Form sei deshalb hier nachgeholt.

Extrempunkt-Kriterium. $y \in WF(\mathscr{F})$ ist genau dann Extrempunkt, wenn es zu beliebigem $\alpha < \beta < 0$ und zu jedem y nicht enthaltenden quasikompaktem nichtleerem $K \subset WF(\mathscr{F})$ ein $f \in \mathscr{F}$ gibt mit: $f \leqq 0$, $y(f) \geqq \beta$, $\alpha \geqq \max_{z \in K} z(f)$.

Beweis. Daß die Bedingung hinreichend ist, sieht man leicht. Denn für $y \leqq \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$ mit $0<\lambda<1$ erhalten wir damit bei nichtleerem $\{y_1, y_2\} \setminus \{y\}$ einen Widerspruch. Sei nun y ein Extrempunkt. Wir zeigen zuerst, daß folgende Ungleichung nicht gilt: $y \leqq (\beta/\alpha) m_K + (1-\beta/\alpha) m_{\rho(X)}$. Denn nach [4, S. 9] gäbe es andernfalls $y_1, y_2 \in WF(\mathscr{F})$ mit $y \leqq (\beta/\alpha) y_1 + (1-\beta/\alpha) y_2$, $y_1 \leqq m_K$. Da y Extrempunkt ist, gilt dann $y = y_1 \leqq m_K$. Dies widerspricht Lemma 1. Also gibt es ein $f_0 \in \mathscr{F}$ mit $y(f_0) > (\beta/\alpha) \max_{z \in K} z(f_0) + (1-\beta/\alpha) \sup_{x \in X} f_0(x)$. Bezeichnen wir noch mit h die konstante Funktion $x \to \sup_{\tilde{x} \in X} f_0(\tilde{x})$ und setzen wir $g = \dfrac{\alpha}{m_K(f_0) - m_{\rho(X)}(f_0)} (f_0 - h)$ wenn $y(f_0) = y(h)$ und anderenfalls $g = \dfrac{\beta}{y(f_0) - y(h)} (f_0 - h)$, so hat $g \in \mathscr{F}$ die gesuchten Eigenschaften. Beim Nachrechnen beachte man, daß

$$z(h) = m_{\rho(X)}(f_0) \qquad \forall z \in WF(\mathscr{F}). \quad \square$$

Beweis zu Satz 1. Nehmen wir an, daß es eine fallende Folge (f_n) in $\mathscr{F}$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in X} f_n(x) > \alpha > \sup_{x \in X} \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ gibt. Dann ist die Familie der $\Phi_n \doteq \{x \in X | f_n(x) \geqq \alpha\}$ Filterbasis auf X, die wir zu einem Ultrafilter Φ verfeinern können. Das dann durch $f \to \inf_{\varphi \in \Phi} \sup_{x \in \varphi} f(x)$ erklärte Funktional μ ist normiert und linear, und es gilt: $\inf \mu(f_n) > \sup_{x \in X} \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$. Nach dem Lebesgueschen Satz über monotone Konvergenz kann μ also kein Darstellungsmaß haben.

Um die Umkehrung zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß aus $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ mit kompaktem K_n folgt, daß $\rho(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \rho(K_n)$, wobei $\rho(K_n)$ quasikompakt ist. Für $\mu \in WF(\mathscr{F})$ gilt also $\mu \leqq \sup\{m_{\rho(K_n)} | n \in \mathbb{N}\}$. In [5, Theorem 3] wurde für den Fall, daß alle Extrempunkte von $WF(\mathscr{F})$ in $\rho(X)$ liegen, gezeigt, daß μ von einer abzählbaren Konvexkombination $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mu_n$ dominiert wird mit $\mu_n \in WF(\mathscr{F})$ und $\mu_n(f) \leqq m_{\rho(K_n)}(f) = \sup_{x\in K_n} f(x)\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall f\in\mathscr{F}$. Nach dem Hahn-Banach Satz von H. König ([10, S. 584] oder [4, S. 6]) gibt es zu jedem μ_n ein Darstellungsmaß ν_n getragen von K_n. Damit ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \nu_n$ Darstellungsmaß von μ. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Extrempunkte von $WF(\mathscr{F})$ in $\rho(X)$ liegen, wenn $\mathscr{F}$ die Dini-Eigenschaft hat. Nehmen wir an μ sei Extrempunkt außerhalb $\rho(X)$. Nach dem vorangegangenen Kriterium gibt es dann $g_k \in \mathscr{F}$ mit

$$g_k \leqq 0, \quad \mu(g_k) \geqq -1/k^2 \quad \text{und} \quad -2 \geqq \max\{z(g_k) | z \in \bigcup_{m\leqq k} \rho(K_m)\}.$$

Dann verletzt die Folge $f_n \doteqdot \sum_{k\leqq n} g_k$ die Dini-Bedingung. □

3. Einige Folgerungen

Damit $\mathscr{F}$ die Dini-Eigenschaft hat, ist sicher notwendig, daß jedes $f\in\mathscr{F}$ sein Maximum auf X annimmt. Denn nimmt f nicht sein Maximum auf X an, so verletzt die Folge $n(f - \sup_{x\in X} f(x))$ die Dini-Eigenschaft.

Im allgemeinen reicht diese *Maximum-Bedingung* jedoch nicht aus, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1. In [6, S. 419] haben wir eine schwachkompakte konvexe Teilmenge Z eines Hilbertraumes H konstruiert, die abzählbar viele Extrempunkte x_0, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ hat, und für welche außerdem gilt, daß jedes Element aus $H'(=H)$ sein Z-Maximum schon auf $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ annimmt. Also erfüllt $\mathscr{F} = H' \oplus \mathbb{R}$ die oben angeführte Maximum-Bedingung auf X. Aber $\mathscr{F}$ hat bezüglich X nicht die Dini-Eigenschaft. Denn sonst hätte nach Satz 1 $f \to f(x_0)$ ein von X getragenes Darstellungsmaß bezüglich $\mathscr{F}$ und damit auch bezüglich $\bar{\mathscr{F}} = A(Z)$ (stetige affine Funktionen auf $Z = Z$-sup-Norm abgeschlossene Hülle von $\mathscr{F}$). Dies ist aber nicht möglich, da x_0 als Extrempunkt dem Choquet-Rand von Z angehört ([1, S. 46] oder [11, S. 8]).

Bemerkung 4. Sei $\tilde{\mathscr{F}}$ ein die Konstanten enthaltender konvexer Kegel von $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$-wertigen Funktionen auf einem quasikompakten Raum Z. $\tilde{\mathscr{F}}$ heißt *σ-vollständig*, wenn das Infimum jeder fallenden Folge wieder in $\tilde{\mathscr{F}}$ liegt. (Wenn $\tilde{\mathscr{F}}$ sogar max-stabil ist, dann fordern wir nur, daß das Infimum jeder fallenden nach unten beschränkten Folge wieder in $\tilde{\mathscr{F}}$ liegt.) Sei nun X eine σ-kompakte Teilmenge von Z, so daß jedes Element des σ-vollständigen Kegels $\tilde{\mathscr{F}}$ sein Z-Maximum schon auf X annimmt. $\mathscr{F} = \tilde{\mathscr{F}}|_X$ hat dann offensichtlich die Dini-Eigenschaft (bezüglich X).

Beispiel 2. Sei Z kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes und $\tilde{\mathscr{F}}$ die Menge der oberhalbstetigen konvexen Funktionen auf Z. X sei eine beliebige σ-kompakte Teilmenge von Z, welche die Extrempunkte ∂Z von Z enthält. $\tilde{\mathscr{F}}$ ist offensichtlich σ-vollständig und jedes $f\in\tilde{\mathscr{F}}$ nimmt auf X sein Z-Maximum an, denn es nimmt ja schon auf ∂Z sein Z-Maximum an ([1, S. 46] oder auch [6, S. 416]), da $\Phi = \{x\in Z | f(x) = \max_{z\in Z} f(z)\}$ abgeschlossene Seite von Z ist, die nach Krein-Milmann einen Extrempunkt enthält. Nach

Hahn-Banach gibt es zu jedem normierten linearen μ auf $\tilde{\mathscr{F}}$ ein normiertes lineares $\tilde{\mu}$ auf $\mathscr{F}=\tilde{\mathscr{F}}|_X$ mit $\mu(f)\leqq\tilde{\mu}(f|_X)\,\forall f\in\tilde{\mathscr{F}}$. $\tilde{\mu}$ hat nun nach Bemerkung 4 und Satz 1 ein Darstellungsmaß auf X. Also hat jedes normierte lineare Funktional μ auf $\tilde{\mathscr{F}}$ ein von einer vorgegebenen F_σ-Menge $\supset\partial Z$ getragenes Darstellungsmaß. Daraus folgt, daß die maximalen (bezüglich punktweiser Ordnung auf $\tilde{\mathscr{F}}$) normierten linearen Funktionale Darstellungsmaße haben, die von *allen* F_σ-Mengen $\supset\partial Z$ getragen werden. (Vgl. [11, S. 30] oder auch [5, Theorem 5].) In diesem Spezialfall ist Satz 1 also der bekannte Darstellungssatz von Choquet-Bishop-deLeeuw.

Wir wollen noch einige einfache Folgerungen von Satz 1 angeben.

3.1. Sei $\tilde{\mathscr{F}}$ ein σ-vollständiger konvexer Kegel oberhalb-stetiger Funktionen auf dem kompakten metrisierbaren Raum Z, außerdem enthalte $\tilde{\mathscr{F}}$ die Konstanten und trenne die Punkte von Z. Wie üblich ist der Choquet-Rand $\mathrm{Ch}(Z)$ die Menge der $z\in Z$, so daß das Punktmaß δ_z das einzige Darstellungsmaß von $f\to f(z)$ ist. Mit $\mathrm{Max}(Z)$ bezeichnen wir die Menge der $z\in Z$, für die es zu jedem Kompaktum $K\subset Z$ mit $K\not\subset\{x\}$ ein $f\in\tilde{\mathscr{F}}$ gibt, so daß $f(z)\geqq\max_{y\in K}f(y)$ und $f(z)>\inf_{y\in K}f(y)$.

Korollar 1. $\mathrm{Max}(Z)=\mathrm{Ch}(Z)$.

Beweis. Es ist bekannt [6, S. 415], daß $\mathrm{Max}(Z)\subset\mathrm{Ch}(Z)$ und daß jedes $f\in\tilde{\mathscr{F}}$ sein Z-Maximum auf $\mathrm{Max}(Z)$ annimmt. Für $z\in\mathrm{Ch}(Z)\setminus\mathrm{Max}(Z)$ gäbe es eine F_σ-Menge $X\supset\mathrm{Max}(Z)$, die z nicht enthält. Genau wie in Beispiel 2 kann man dann im Widerspruch zur Definition von $\mathrm{Ch}(Z)$ ein von X getragenes Darstellungsmaß für $f\to f(z)$ finden. □

3.2. Sei X σ-kompakter Teilraum des kompakten Raumes Z, und sei E linearer Teilraum von $C(Z)|_X$, $(C(Z)$ stetige reelle Funktionen auf $Z)$. Mit $\mathrm{Prob}(X)|_E$ (bzw. $\mathrm{Prob}(Z)|_E$) bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeitsmaße getragen von X (bzw. Z) modulo E.

Korollar 2. *Wenn E die Dini-Eigenschaft hat, dann gilt* $\mathrm{Prob}(X)|_E=\mathrm{Prob}(Z)|_E$. *Insbesondere ist dann* $\mathrm{Prob}(X)|_E$ *kompakt bezüglich der punktweisen Konvergenz auf E.*

Beweis. Nach Hahn-Banach [10, S. 584] gibt es zu jedem $\mu\in WF(E)$ ein Darstellungsmaß ν auf Z und nach Satz 1 ein Darstellungsmaß $\tilde{\nu}$ auf X. Da E Vektorraum ist, gilt: $\mu(f)=\int_Z f\,d\nu=\int_X f\,d\tilde{\nu}\ \forall f\in E$. Daraus folgt $WF(E)\subset\mathrm{Prob}(X)|_E$ und $WF(E)\subset\mathrm{Prob}(Z)|_E$. Die Inklusionen in der anderen Richtung sind trivial, also $WF(E)=\mathrm{Prob}(X)|_E=\mathrm{Prob}(Z)|_E$. Der Rest folgt aus der Kompaktheit von $\mathrm{Prob}(Z)|_E$ bezüglich punktweiser Konvergenz auf E. □

Beispiel 3. Jeder pseudokompakte, σ-kompakte und vollständig-reguläre Raum X ist kompakt.

Beweis. Da X vollständig-regulär ist, haben wir $X\subset\beta X$, wobei βX die Stone-Čech Kompaktifizierung von X ist. $E=CB(X)$ hat bei pseudokompaktem X die Dini-Eigenschaft, also gibt es nach Korollar 3 für $z\in\beta X$ ein Darstellungsmaß $\nu\in\mathrm{Prob}(X)$. Da $CB(X)$ $(=C(X))$ die Punkte von $\mathrm{Prob}(\beta X)$ trennt, muß ν das Punktmaß δ_z sein. Also $z\in X$. □

Dies ist bekannt, denn jeder σ-kompakte Raum ist reellkompakt, und jeder reellkompakte pseudokompakte vollständig-reguläre Raum ist kompakt [7, S. 72 und 115].

Beispiel 4. Sei Z kompakte konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes, und seien K_n kompakte konvexe Teilmengen von Z, so daß $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \supset \partial Z$. Dann ist jedes $z\in Z$ darstellbar als abzählbare Konvexkombination $z=\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n$, wobei $x_n \in K_n$ ([5, S. 4]).

Beweis. $A(Z)|_X$ ($A(Z)$ affine stetige Funktionen auf Z) hat die Dini-Eigenschaft (s. Beispiel 2). Mithin $\operatorname{Prob}(Z)|_{A(Z)}=\operatorname{Prob}(X)|_{A(Z)}$. Also gibt es für jedes $z\in Z$ eine abzählbare Konvexkombination:

$$\delta_z = (\text{modulo } A(Z)) \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mu_n,$$

wobei $\mu_n \in \operatorname{Prob}(K_n)$. Anwendung der Schwerpunktsabbildung r ergibt die Behauptung, denn $r(\mu_n)\in K_n$ und $r(\delta_z)=z$. □

Literatur

1. Alfsen, E. M.: Compact Convex sets and Boundary Integral. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
2. Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Berlin: de Gruyter 1968
3. Dugundji, J.: Topology. Boston: Allyn and Bacon 1972
4. Fuchssteiner, B.: Sandwich theorems and lattice Semigroups. J. functional Analysis **16**, 1–14 (1974)
5. Fuchssteiner, B.: Lattices and Choquet's Theorem. J. functional Analysis **17**, 377–387 (1974)
6. Fuchssteiner, B., Hackenbroch, W.: Maximumpunkte. Arch. der Math. **23**, 415–421 (1972)
7. Gillman, L., Jerison, M.: Rings of Continuous Functions. New York-Toronto-London-Melbourne: Van Nostrand 1960
8. Glicksberg, I.: The representation of functionals by Integrals. Duke math. J. **19**, 253–261 (1952)
9. Goldstine, H. H.: Linear functionals and integrals in abstract Spaces. Bull. Amer. math. Soc. **47**, 615–620 (1941)
10. König, H.: Sublineare Funktionale. Arch. der Math. **23**, 500–508 (1972)
11. Phelps, R. R.: Lectures on Choquet's Theorem. Princeton, Toronto, New York, London: Van Nostrand 1966
12. Rudin, W.: Real and Complex Analysis. New York, London, Sidney: McGraw-Hill 1966

Prof. Dr. B. Fuchssteiner
Fachbereich Mathematik
Gesamthochschule
D-479 Paderborn
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 23. Oktober 1974)