C.R. Acad.Sci.Paris A 274, 1809 - 1812 (1972)

# SUR LES MESURES DE JENSEN SUPPORTEES PAR UNE FRONTIERE PLUS FINE QUE LA FRONTIERE DE CHILOV

Benno FUCHSSTEINER

Nous donnons ici pour une algèbre de fonctions $A$ une frontière plus fine que la frontière de Chilov telle que chaque point du spectre de $A$ admette des mesures de Jensen supportées par cette frontière.

Soit $A(X)$ une algèbre de fonctions complexes sur un compact $X$, contenant les constantes, séparant les points de $X$ et fermée pour la convergence uniforme. Nous appelons frontière faible de Choquet de $X$ l'ensemble (noté $\widetilde{Ch}(X)$) des points $x \in X$, tels que $x$ appartienne au support compact de chaque mesure de probabilité qui représente le point $x$. On dit qu'une mesure $\mu$ représente $x$, si

$$\int_X \varphi d\mu = \varphi(X) \quad , \quad \forall \varphi \in A(X) \; .$$

On a toujours $Ch(X) \subset \widetilde{Ch}(X) \subset \overline{Ch(X)}$, où $Ch(X)$ est la frontière de Choquet et $\overline{Ch(X)}$ sa fermeture. Les exemples suivants montrent que ces inclusions ne sont pas triviales.

<u>Exemples</u>.

Quand $X$ est un swiss cheese et $A(X) = R(X)$, alors $\widetilde{Ch}_A(X) = X$ ([3]). Un autre exemple où $\widetilde{Ch}_A(X) = X$ : les algèbres normales ([4]) . Mais on peut donner aussi des exemples où $Ch_A(X) = \widetilde{Ch}_A(X)$ . Soient $\Delta$ le disque unité du plan complexe, $X = \Delta \times [0,1]$ et $A(X)$ les fonctions continues dans $X$ et holomorphes dans $\Delta \times \{0\}$, alors $\widetilde{Ch}_A(X) = Ch_A(X) = \Delta \times ]0,1] \cup \{(z,0) \mid , z \in \mathbb{C} , |z| = 1\}$. On dit qu'une mesure de probabilité $\mu$ sur $X$, est une mesure de Jensen pour $x$, si

$$\ln|\varphi(X)| \leq \int_X \ln|\varphi| d\mu \quad , \quad \forall \varphi \in A(X) \; ,$$

et que $\mu$ est supportée par $\widetilde{Ch}(X)$, si $\mu(B) = 0$ pour chaque ensemble de Baire $B$ avec $B \cap \widetilde{Ch}(X) = \emptyset$ .

Théorème.

Pour chaque $x \in X$ il existe une mesure de Jensen supportée par $\widetilde{Ch}(X)$ .

Pour la démonstration nous étudions d'abord les différentes notions de frontière.

1. Les frontières de Choquet.

Soient $X$ compact et $\Psi$ une famille de fonctions $X \to R \cup \{-\infty\}$ semi-continues supérieurement, qui sépare les points de $X$ . Notons $Prob(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $X$ . Pour $\sigma \in Prob(X)$ , $x \in X$ , définissons :

$$\sigma \text{ est } \Psi\text{-représentant de } x \Leftrightarrow \int_X \varphi d\sigma \geq \varphi(X) , \quad \forall \varphi \in \Psi .$$

$Ch_\Psi(X) = \{x \in X \mid \sigma\ \Psi\text{-représentant } x \Rightarrow \sigma = \delta_X\}$ est la frontière de Choquet de $X$ par rapport à $\Psi$ ($\delta_X$ est la mesure de Dirac pour $x$) . Nous appelons

$$\widetilde{Ch}_\Psi(X) = \{x \in X \mid \sigma\ \Psi\text{-représentant } x \Rightarrow x \in supp(\sigma)\} ,$$

où $supp(\sigma)$ est le support compact de $\sigma$ , la frontière faible de Choquet .

A l'aide du théorème de Hahn-Banach on obtient les caractérisations suivantes de $Ch(X)$ et $\widetilde{Ch}(X)$ données dans [3].

Lemme 1.

Soit $\Psi + \Psi \subset \Psi$ ; $x$ appartient à $\widetilde{Ch}_\Psi(X)$ si et seulement si pour chaque compact non vide $K \subset X - \{x\}$ il existe une $\varphi \in \Psi$ telle que $\varphi(x) > \max \varphi(K)$ (condition de maximum).

Lemme 2.

Soient $\alpha$ , $\beta$ arbitraires avec $1 > \beta > \alpha$ et $\Psi$ contenant les constantes, tel que pour tous les $\lambda$ , $\widetilde{\lambda}$ positifs et rationnels, $\lambda\Psi + \widetilde{\lambda}\Psi \subset \Psi$ ($\Psi$ est un cône rationnel). Alors $x$ appartient à $Ch_\Psi(X)$ si et seulement si pour chaque compact non vide $K \subset X - \{x\}$ il existe un $\varphi \in \Psi$ telle que (condition $(\alpha, \beta)$) :

$$1 \geq \max \varphi(X) \geq \varphi(x) \geq \beta > \alpha \geq \max \varphi(K) .$$

Remarques.

L'inclusion $\widetilde{Ch}_\Psi(X) \supset Ch_\Psi(X)$ est toujours valable. Par le lemme 2 on voit aisément que la frontière de Chilov existe et contient $\widetilde{Ch}_\Psi(X)$ dans cette situation. Quand on remplace $\Psi$ par le cône positif contenant les constantes et engendré par $\Psi$, les frontières de Choquet ne changent pas. Et si $\Psi$ est une famille de fonctions continues, et si l'on prend au lieu de $\Psi$ la fermeture de $\Psi$ par rapport à la convergence uniforme, les frontières de Choquet ne changent pas non plus.

Nous disons que $\varphi \in \Psi$ est presque continue quand pour chaque $k \in R$, $\varphi_k$, définie par $\varphi_k(X) = \max(k,\varphi(X))$, $\forall x \in X$, est continue. Quand $\sigma \in \mathrm{Prob}(X)$ vérifie $\sigma(B) = 0$ pour chaque ensemble de Baire avec $B \cap Y = \phi$, nous disons que $\sigma$ est supporté par $Y$.

Proposition 1.

Soient les éléments de $\Psi$ presque continus, alors pour chaque $x \in X$ il existe un $\sigma$ $\Psi$-représentant $x$, qui est supporté par $Ch_\Psi(X)$.

Démonstration : Soient $J_1$, $J_2$ les cônes positifs contenant les constantes, engendrés par $\Psi$ et $\{\varphi_k \mid k\in R,\ \varphi\in\Psi\}$. D'après E.M. Ahlfsen ([1],p.53) il existe un $\sigma$ $J_2$-représentant $x$ supporté par $Ch_{J_2}(X)$. Le lemme 2 donne $Ch_{J_2}(X) \supset Ch_{J_1}(X)$, donc $Ch_\Psi(X) \supset Ch_{J_2}(X)$. Et puisque $J_2$-représentant entraîne $\Psi$-représentant, on déduit la proposition. ∎

## 2. Les algèbres de fonctions.

Soit $A(X)$ une algèbre de fonctions complexes sur $X$, contenant les constantes et séparant les points de $X$. $\mathrm{Re}(A)$, $|A|$, $|A|^p$, $\ln|A)$ sont les parts réelles, les valeurs absolues, les puissances p des valeurs absolues et les logarithmes des valeurs absolues.

Lemme 3.

$$\widetilde{Ch_{\ln|A|}}(X) = \widetilde{Ch_{|A|}}(X) = \widetilde{Ch_{\mathrm{Re}(A)}}(X) = \widetilde{Ch}(X) .$$

Démonstration : Puisque $\ln|A| \supset \mathrm{Re}(A)$ et $\mathrm{Re}(A)$-représentant entraînent $A$-représentant, on déduit : $Ch_{|A|}(X) \subset Ch_{\mathrm{Re}(A)}(X) \subset Ch_{\ln|A|}(X)$ . Pour $x \in Ch_{\ln|A|}(X)$ et $K$ compact $\subset X \div \{x\}$ , il existe (lemme 1) une $\varphi \leq \ln|f|$ , $f \in A$ , avec :

$$\ln|f(x)| > \max \ln|f(K)| .$$

Donc $|f|(x) > \max|f(K)|$ . Cela veut dire que $x$ vérifie la condition de maximum par rapport au cône engendré par $|A|$ , donc $x \in Ch_{|A|}(X)$ . ∎

Démonstration du théorème : La proposition 1 fournit des mesures de Jensen (mesures $\ln|A|$-représentantes) supportées par

$$Ch_{\ln|A|}(X) \subset Ch_{\ln|A|}(X) = Ch(X) . \quad ∎$$

3. Caractérisation de $Ch_{\ln|A|}(X)$ .

On peut utiliser les lemmes 1 et 2 pour donner une caractérisation de $Ch_{\ln|A|}(X)$ similaire de la caractérisation des points pics pour $A(X)$ .

Soit $J_p(A)$ le cône positif engendré par $\bigcup_{p>0} |A|^p$ .

Proposition 2.

Soit $1 > \beta > \alpha > 0$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La mesure de Dirac $\delta_x$ est la seule mesure de Jensen pour $x$ .

(ii) Pour chaque compact non vide $K \subset X-\{x\}$ il existe une $\varphi \in A$ et un $m \in N$ tels que :

$$1 \geq \max|\varphi(X)| \geq |\varphi(X)| \geq \beta^m > \alpha^m \geq \max|\varphi(K)| .$$

(iii) Pour chaque compact non vide $K \subset X-\{x\}$ , il existe une $g \in J_p(A)$ telle que :

$$1 \geq \max g(X) \geq g(X) \geq \beta > \alpha \geq \max g(K) .$$

Démonstration : (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $\tilde{\beta} = \ln(\beta)+1$ , $\tilde{\alpha} = \ln(\alpha)+1$ $(1>\tilde{\beta}>\tilde{\alpha})$ . $\bigcup_{m\in N} \frac{1}{m} \ln|A|$ est un cône rationnel ; donc (lemme 2) pour chaque $x \in Ch_{\ln|A|}(X)$ et $K$ compact $\subset X-\{x\}$ , il existe une $g \in \ln|A|$ , $m \in \mathbb{N}$ telle que :

$$1 \geq \frac{1}{m} \max g(X) \geq \frac{1}{m} g(X) \geq \tilde{\beta} > \tilde{\alpha} \geq \frac{1}{m} \max g(K) \; .$$

Donc $\varphi \in A$ avec $g = \ln|e^{m}\varphi|$ vérifie :

$$1 \geq \max|\varphi(X)| \geq |\varphi(X)| \geq \beta^{m} > \alpha^{m} \geq \max|\varphi(K)| \; .$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) est triviale.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : la condition $(\alpha, \beta)$ implique que $x \in Ch_{J_p(A)}(X) = Ch_{\Psi}(X)$, où $\Psi = \bigcup_{p>0} |A|^{p}$. Mais $\Psi$-représentant $x \Leftrightarrow \ln|A|$-représentant $x$, est un résultat bien connu (Browder [**2**], p.126), donc $Ch_{\Psi}(X) = Ch_{\ln|A|}(X)$ . ∎

[1] - E.M. AHLFSEN - "Compact convex sets and boundary integrals". Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1971).

[2] - A. BROWDER - "Introduction to function algebras". Benjamin, New York-Amsterdam (1969).

[3] - B. FUCHSSTEINER, W. HACKENBROCH - "Maximumpunkte". Arch. Math. (1972).

[4] - R. Mc. KISSICK - "A non trivial normal sup norm algebra". Bull. A.M.S. 69 (1963), p. 391-395.

Institut de Mathématiques Pures
BP n° 116
38402 - ST MARTIN D'HERES

et

Mathematisches Institut
Technische Hochschule
D 61 Darmstadt
Hochschulstrasse 1